

Yleinen suhteellisuusteoria



Hannu Kurki-Suonio

Helsingin yliopisto, fysiikan laitos

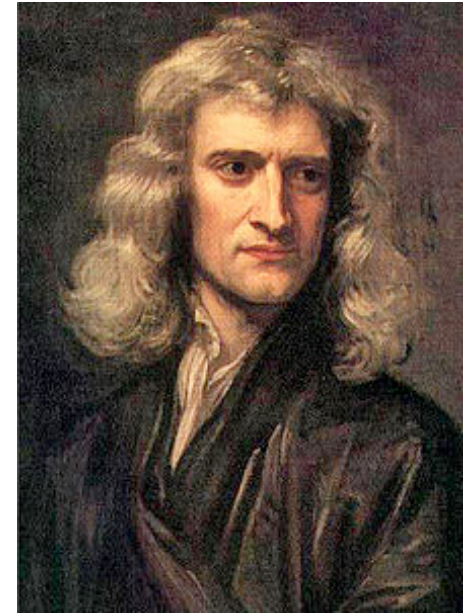
Luonnonfilosofian seuran teemailta

Yleinen suhteellisuusteoria 100 v.

10.11.2015

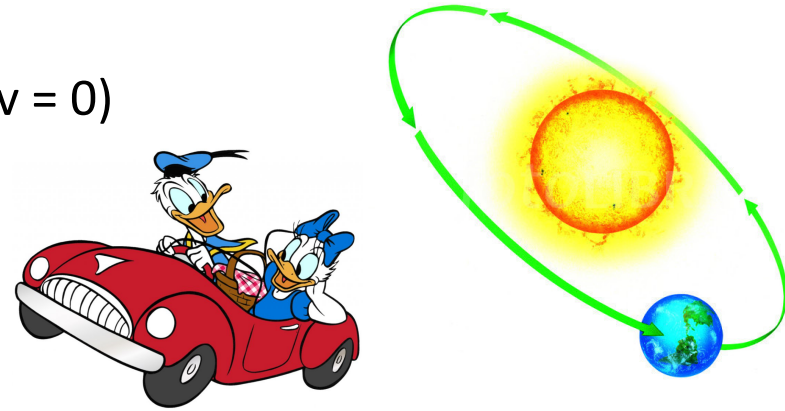
Viisi teoriaa

- Newtonin mekaniikka 1687
- Newtonin painovoimateoria 1687
- Klassinen elektrodynamiikka
 - (sähkömagnetismin teoria), Maxwell 1865
- Suppea suhteellisuusteoria (Einstein 1905)
- Yleinen suhteellisuusteoria (Einstein 1915)



Vanha suhteellisuusperiaate

- Liike (nopeus) on suhteellista
 - ei ole absoluuttista lepotilaa (nopeus $v = 0$)
- mutta kiihtyvyys on absoluuttinen
 - kaikille havaitsijoille sama; absoluuttinen “kiihtymätön tila” = tasainen nopeus
- Aika on absoluuttinen – kaikille havaitsijoille sama
 - tapahtuvatko kaksi eri paikassa sattuvaa tapahtumaa samalla hetkellä?
vastaus on yksikäsitteinen
- Paikka (avaruus) on suhteellinen
 - tapahtuvatko kaksi eri ajanhetkinä sattuvaa tapahtumaa samassa paikassa?
vastaus ei ole yksikäsitteinen, vaan riippuu viitekoordinaatistosta (“havaitsijan liiketilasta”)



Vanha suhteellisuusperiaate

- Kahden tapahtuman välinen ajallinen etäisyys (montako tuntia) on absoluuttinen
- Kahden samanaikaisen tapahtuman välinen paikallinen etäisyys (montako kilometriä) on absoluuttinen
- Kahden eriaikaisen tapahtuman välinen paikallinen etäisyys on suhteellinen, riippuu havaitsijan (tai käytetyn koordinaatiston) liiketilasta
- Vanhaa suhteellisuusperiaatetta noudattavat:
 - Newtonin mekaniikka

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

- Newtonin painovoimateoria

$$\vec{F} = Gm_1m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Vanha suhteellisuusperiaate

- Maxwellin elektrodynamiikka ei noudattanut sitä

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\vec{F} = \underset{\text{Electric force}}{q\vec{E}} + \underset{\text{Magnetic force}}{q\vec{v} \times \vec{B}}$$

- Maxwellin yhtälöissä esiintyy nopeus:
 - Levossa oleva varattu hiukkanen synnyttää ja tuntee vain sähkökentän, liikkeessä oleva myös magneettikentän
- Maxwellin yhtälöt => valon tyhjiönopeus $c = 300\,000 \text{ km/s}$
- Liike minkä suhteen?
- Syntyi ajatus “maailmaneetteristä”
 - kaikkialla läsnä oleva substanssi
 - sähkö- ja magneettikentät olisivat sen jännitystiloja
 - Maxwellin yhtälöissä esiintyvät nopeudet olisivat maailmaneetterin suhteen

Suppean suhteellisuusteorian synty

- Einstein pohti Maxwellin elektrodynamiikkaa
- Teoria näyttää olevan muotoiltu absoluuttisen lepokoordinaatiston suhteen
- Mutta ilmiöt ovat samat, vaikka koordinaatistoa vaihdetaan
 - teoria vain selittää ilmiöt eri lailla
 - jos käytetään koordinaatistoa, jossa varaus on levossa, siihen liittyvät ilmiöt selitetään sähkökentän vaikutuksena
 - jos koordinaatistoa, jossa varaus liikkuu, sekä sähkökentän että magneettikentän vaikutuksena
- Ehkä elektrodynamiikka noudattaakin suhteellisuusperiaatetta!
 - sähkö- ja magneettikenttäkin suhteellisia

Zur Elektrodynamik bewegter Körper

- Einstein 1905: suppea suhteellisuusteoria
- Einstein etsi muunnoskaavoja sähkö- ja magneettikentille koordinaatiston (havaitsijan liiketilan) muunnoksissa

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + (1 - \gamma) \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \right) + (1 - \gamma) \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}$$

- ei onnistunut vanhan suhteellisuusperiaatteen puitteissa
- tämä on ilmeistä koska Maxwellin yhtälöt antavat valolle tietyn nopeuden
- tarvittiin uusi suhteellisuusperiaate, jossa nopeuden lisäksi myös aika on suhteellista
- mutta valonnopeus on absoluuttinen

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$$

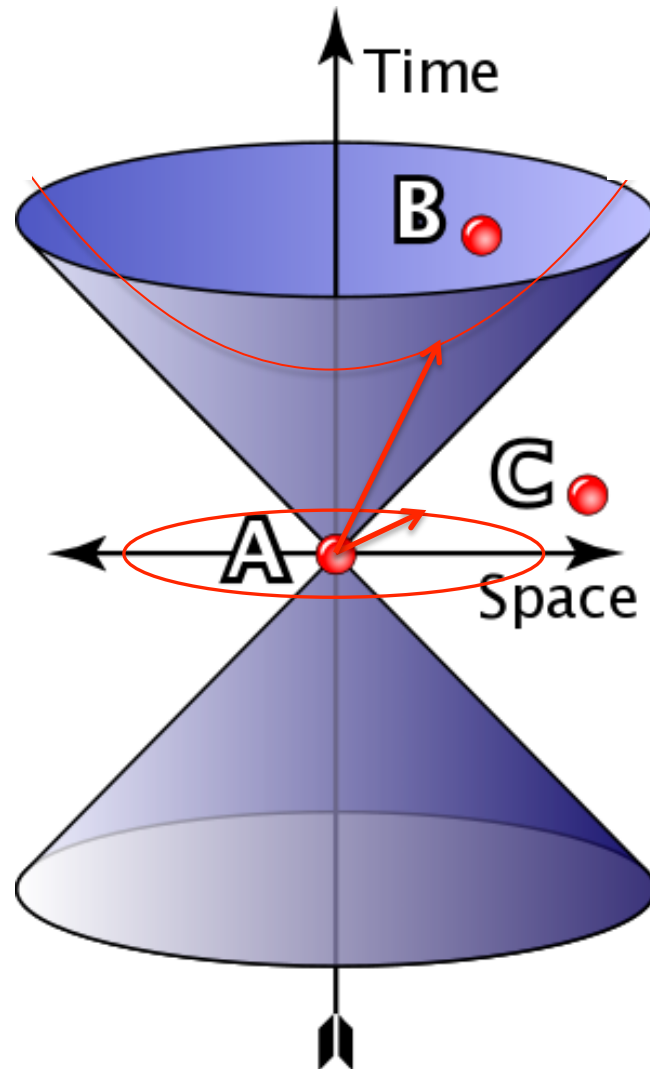
$$y = y', z = z'$$

$$\text{where } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Minkowskin avaruus

- Einstein esitti teorianensa ajan ja paikan muunnoskaavoina
- Minkowski huomasi, että teoria voidaan tulkita neliulotteisena aika-avaruutena
 - nopeus = suunta aika-avaruudessa
- Koordinaatiston (liiketilän) muunnoksissa aika ja paikka muuttuvat osittain toisikseen
- Vastaa etusuunnan (x) ja sivusuunnan (y) muuttumista toisikseen havaitsijan kääntyessä
- Poikkeaa kuitenkin eukleidisesta geometriasta:
 - aika- ja paikka eivät voi kokonaan vaihtua toisikseen
 - vaan niitä rajaa valokartio

Valokartio



Uusi suhteellisuusperiaate

- Liike (nopeus) on suhteellista
 - ei ole absoluuttista lepotilaa (nopeus $v = 0$)
- Poikkeus: valonnopeus on absoluuttinen – kaikille havaitsijoille sama
- Kiihtyvyys on absoluuttinen
- Aika on suhteellinen: tapahtuvatko kaksi eri paikassa sattuvaa tapahtumaa samalla hetkellä?
 - riippuu havaitsijan liiketilasta (käytetystä koordinaatistosta)
- Paikka (avaruus) on suhteellinen: tapahtuvatko kaksi tapahtumaa samassa paikassa?
 - riippuu havaitsijan liiketilasta
- Kahden tapahtuman välinen
 - ajallinen etäisyys on suhteellinen
 - paikallinen etäisyys on suhteellinen
 - näistä voidaan muodostaa absoluuttinen (invariantti) kombinaatio

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

Tilanne ennen yleistä suhteellisuusteoriaa

- Suppea suhteellisuusteoria on ristiriidassa Newtonin mekaniikan kanssa ja korvasi sen
- Suppea suhteellisuusteoria on ristiriidassa Newtonin painovoimateorian kanssa
- ~~Newtonin mekaniikka~~
- ~~Newtonin painovoimateoria~~
- Klassinen elektrodynamiikka
 - teorian yhtälöt ennallaan
 - mutta nyt pätevät kaikkien tasaisten liiketilojen suhteen
- Suppea suhteellisuusteoria
- Tarvitaan uusi painovoimateoria

Liikkeen suhteellisuudesta

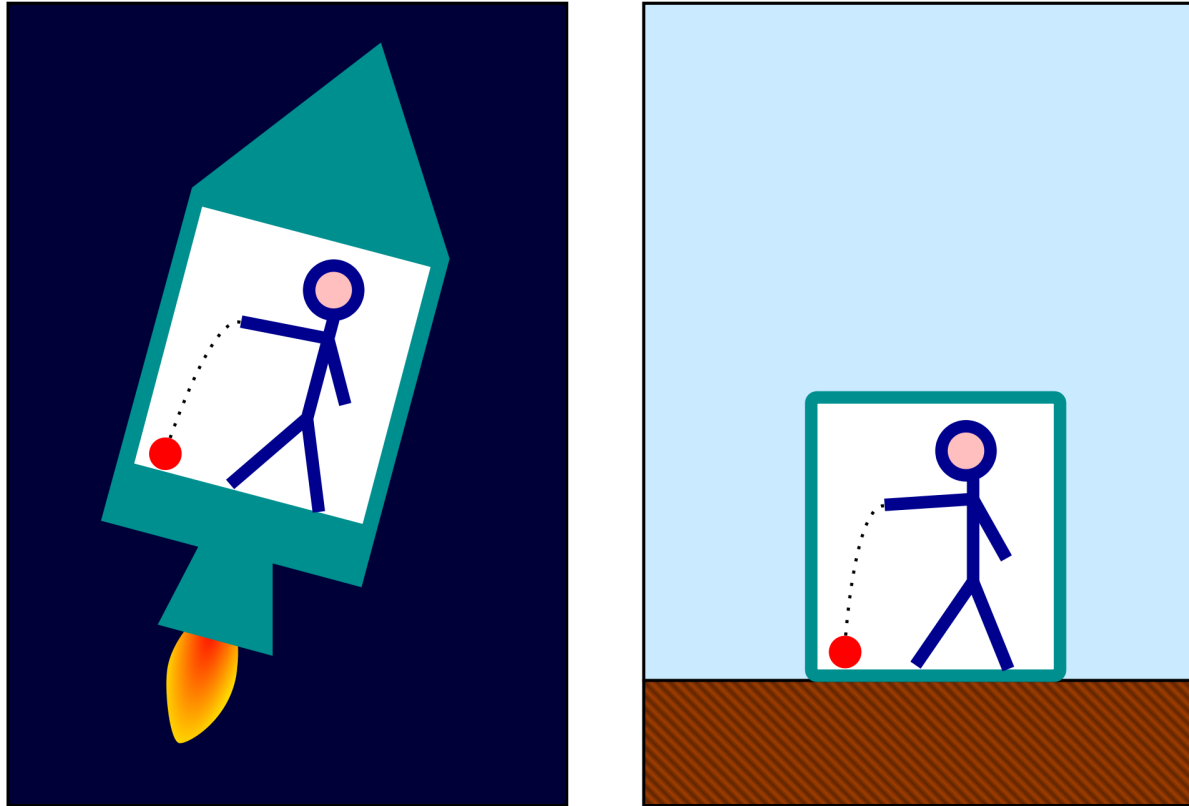
- Sekä vanhassa että uudessa suhteellisuusperiaatteessa liikkeen suhteellisuus koskee vain nopeutta, ei kiihtyvyyttä
 - kaikki tasaisen nopeuden liiketilat ovat samanarvoisia
 - (uudessa kuitenkin valonnopeus erikoisasemassa)
 - ei ole absoluuttista lepotilaa
 - sen sijaan **kiihtyvyys on absoluuttista**, samoin pyöriminen
 - tasainen suoraviivainen liike on absoluuttisesti kiihtymätöntä
 - pyörimätön tila on absoluuttisesti pyörimätön
- Einsteinia viehätti ajatus, että kaikki liike olisi suhteellista
 - Ernst Machin ajatus
 - tämä ei kuitenkaan lopulta toteutunut yleisessä suhteellisuusteoriassa

“glücklichste Gedanke meines Lebens”

- Painovoimakentässä kaikki kappaleet putovat samalla kiihtyvyydellä
 - Lähellä toisiaan vapaasti putoavilla kappaleilla ei ole kiihtyvyyttä toisiinsa nähden
 - Vapaasti putoava havaitsija, joka havaitsee vain tällaisia kappaleita, ei havaitse painovoimakentän vaikutusta



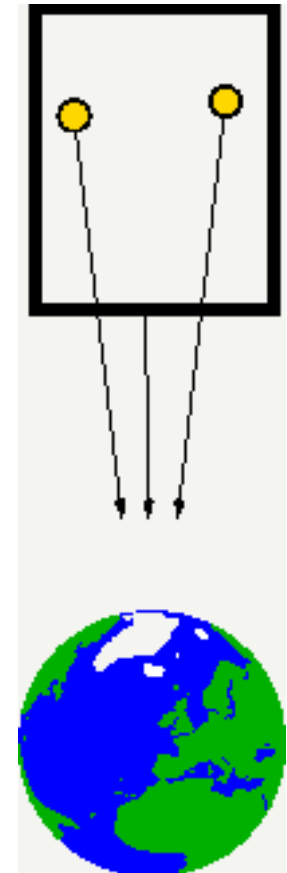
Laboratorion kiihtyvyyys vai painovoimakenttä?



- Painovoimaa ei voi havaita paikallisin kokein
 - (ei voi erottaa siitä, että laboratorio on kiihtyvässä liikkeessä)

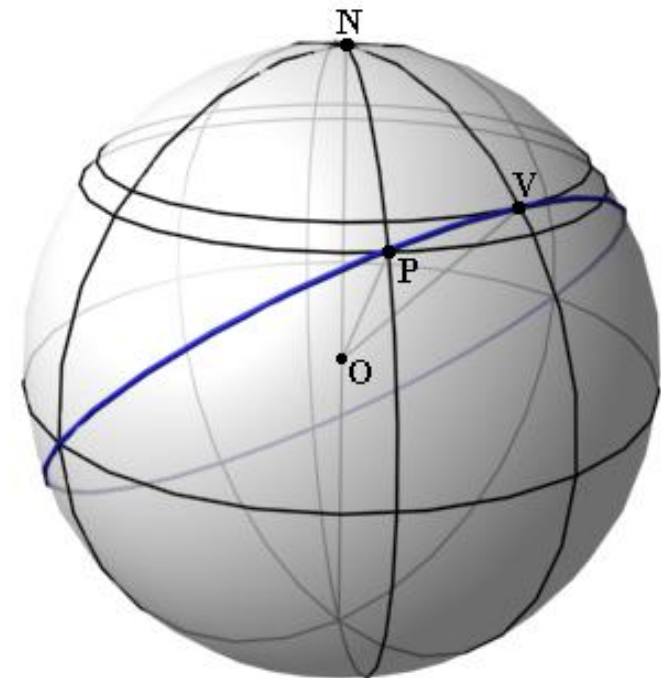
Ekvivalenssiperiaate

- Painovoimakenttää ei voi havaita paikallisesti
- Ekvivalenssiperiaate: paikallisesti luonnonlait ovat suppean suhteellisuusteorian (joka siis ei sisällä painovoimaa) mukaiset
- “Painovoiman” voi kuitenkin havaita vertailemalla kaukana toisistaan olevien kappaleiden vapaata putoamista



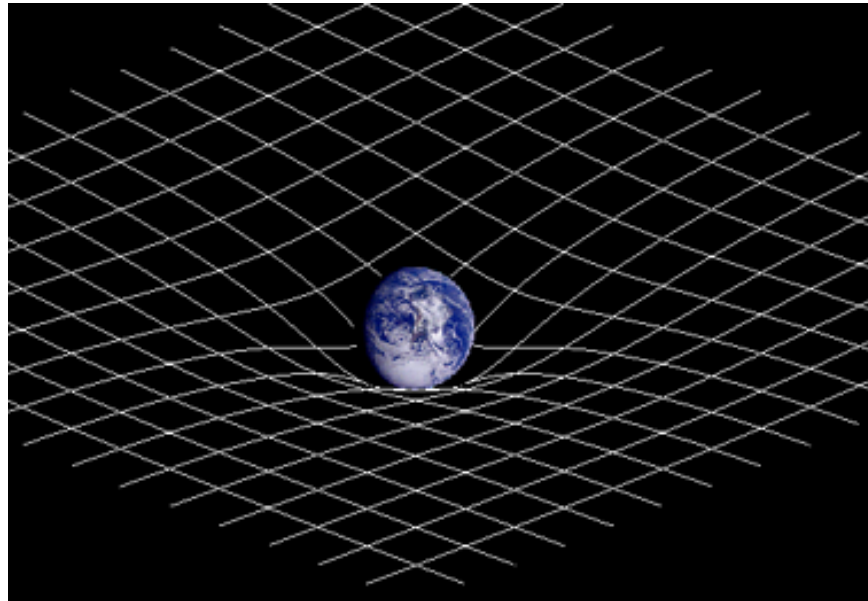
Aika-avaruuden kaarevuus

- Ekvivalenssiperiaate johtaa ajatukseen aika-avaruuden kaarevuudesta
- Painovoimakenttä määrittelee erikoisasemassa olevat liikeradat: vapaan putoamisen liikeradat = geometrinen painovoimakentän kuvaus
- Painovoimakentän paikallinen häviäminen siirtymällä vapaasti putoavan havaitsijan koordinaatistoon
 - vrt. kaarevan pinnan kaarevuuden paikallinen häviäminen tarkastelemalla riittävän pientä osaa pinnasta



Gravitaatio on aika-avaruuden kaarevuutta

- Painovoima ei ole voima
- Siksi on parempi puhua gravitaatiosta
- Aine ja energia aiheuttavat aika-avaruuden kaarevuuden ympärillään



- Vapaasti putoavat kappaleet liikkuvat tässä kaarevassa aika-avaruudessa “niin suoraan kuin mahdollista” = pitkin geodeesejä

Gravitaatio on aika-avaruuden kaarevuutta

- Kappaleeseen vaikuttavat (muut kuin paino)voimat aiheuttavat poikkeaman geodeesiltä
- Maanpinnalla olevaan kappaleeseen vaikuttava todellinen voima on maanpinnan (atomitason sähkömagneettinen) voima, joka työntää kappaletta pois vapaan putoamisen radalta
- Planeetojen radat auringon ympäri ovat aika-avaruudessa niin suoria kuin mahdollista, ne näyttävät meistä käyriltä, koska hahmotamme ajan ja avaruuden erikseen

Kaarevuuden vapausasteet

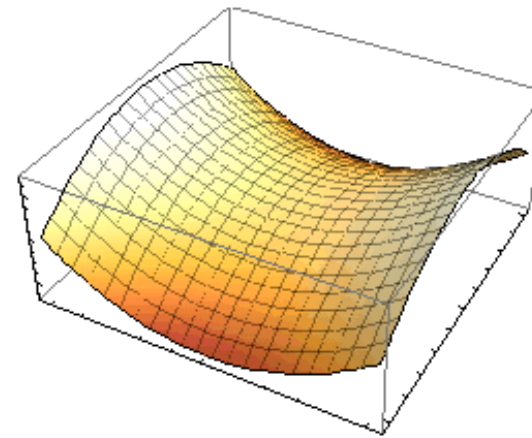
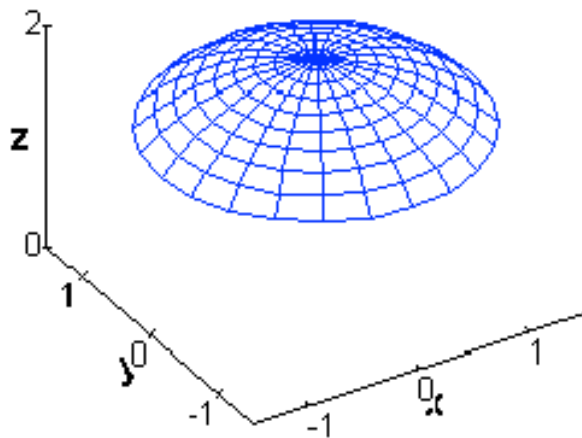
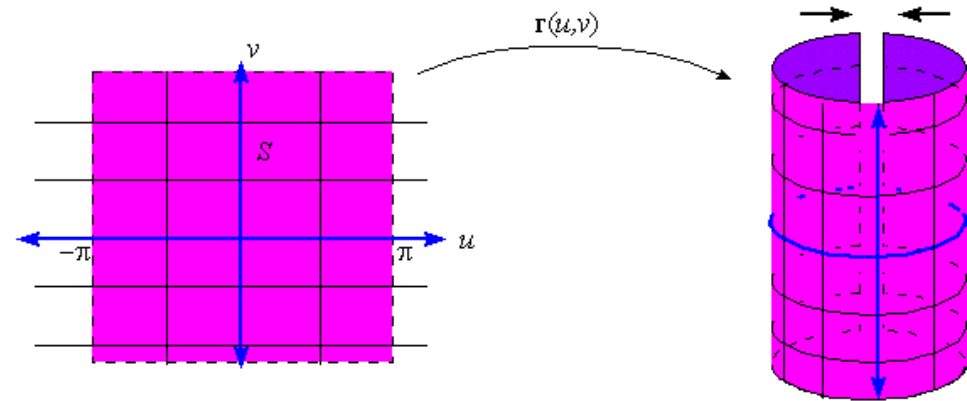
- N-ulotteisella avaruuden sisäisellä kaarevuudella on $N^2 \times (N^2 - 1) / 12$ vapausastetta
 - 2-ulotteisella 1 vapausaste
 - 3-ulotteisella 6 vapausastetta
 - 4-ulotteisella 20 vapausastetta
- Kaarevuutta kuvaa Riemannin kaarevuustensori, jolla on 20 riippumatonta komponenttia

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$$

- Näistä voidaan muodostaa Einsteinin tensori $G_{\mu\nu}$ ja Weilin tensori, kummallakin 10 komponenttia

Kaarevuuden vapausasteet

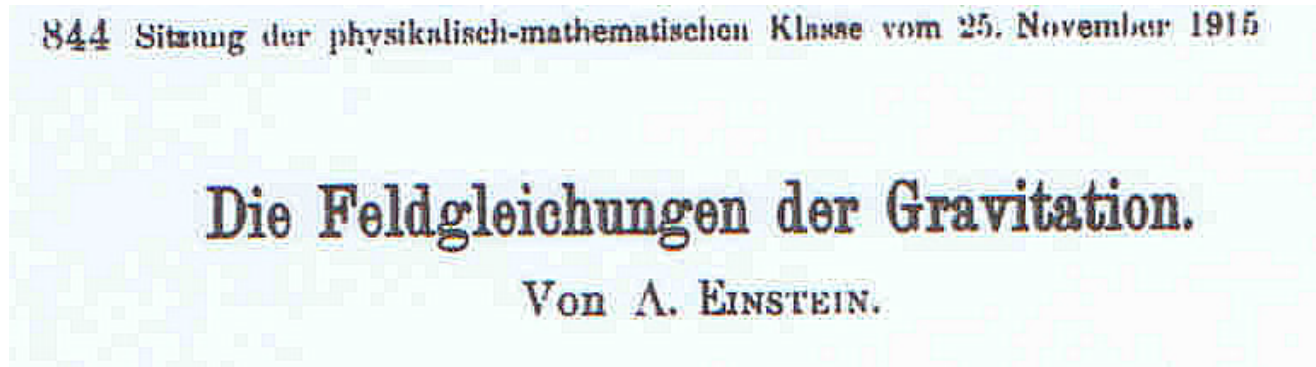
- Kykenemme kuvittelemaan 2-ulotteista kaarevaa pintaa 3-ulotteisessa avaruudessa
 - Miksi vain yksi vapausaste?
 - Sisäinen ja ulkoinen kaarevuus



Miten kävi liikkeen suhteellisuuden?

- Suppeassa suhteellisuusteoriassa erikoisasemassa oli suoraviivainen liike tasaisella nopeudella
 - liike joko on tällaista tai ei – poikkeama tästä on kiihtyvyyttä, joka voidaan määritellä yksikäsitteisesti: absoluuttinen
- Yleisessä suhteellisuusteoriassa tämän roolin saa vapaasti putoava liike
 - liike joko on tällaista tai ei – poikkeama tästä on kiihtyvyyttä suhteessa vapaaseen putoamiseen, joka voidaan määritellä yksikäsitteisesti: absoluuttinen

Puuttuu vielä kaarevuuden määrävä laki



- kaarevuuden aiheuttaa aine ja energia

Two red arrows point from the words "kaarevuuden" and "energia" in the list item above to the terms $G_{\mu\nu}$ and $T_{\mu\nu}$ in the equation below. A blue arrow points from the text "Newtonin painovoimavakio" below to the G in the equation.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Newtonin painovoimavakio

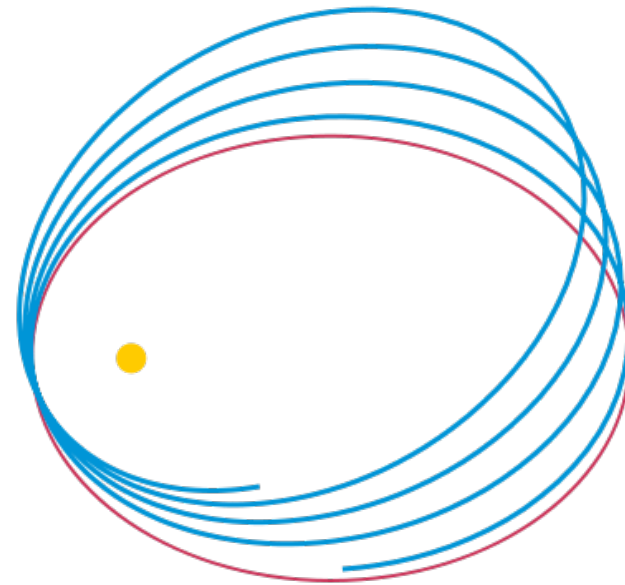
- Einsteinin yhtälö määrää 10 kaarevuuden 20:sta vapausasteesta
 - toiset 10 vapausastetta määräytyvät reunaehdoista: kauempana olevista lähteistä

Yleisen suhteellisuusteorian klassiset testit

- Merkuriuksen perihelin kiertymä
- Valon taipuminen auringon painovoimakentässä
- Gravitaatiopunasiiirtymä: ajan “hidastuminen”

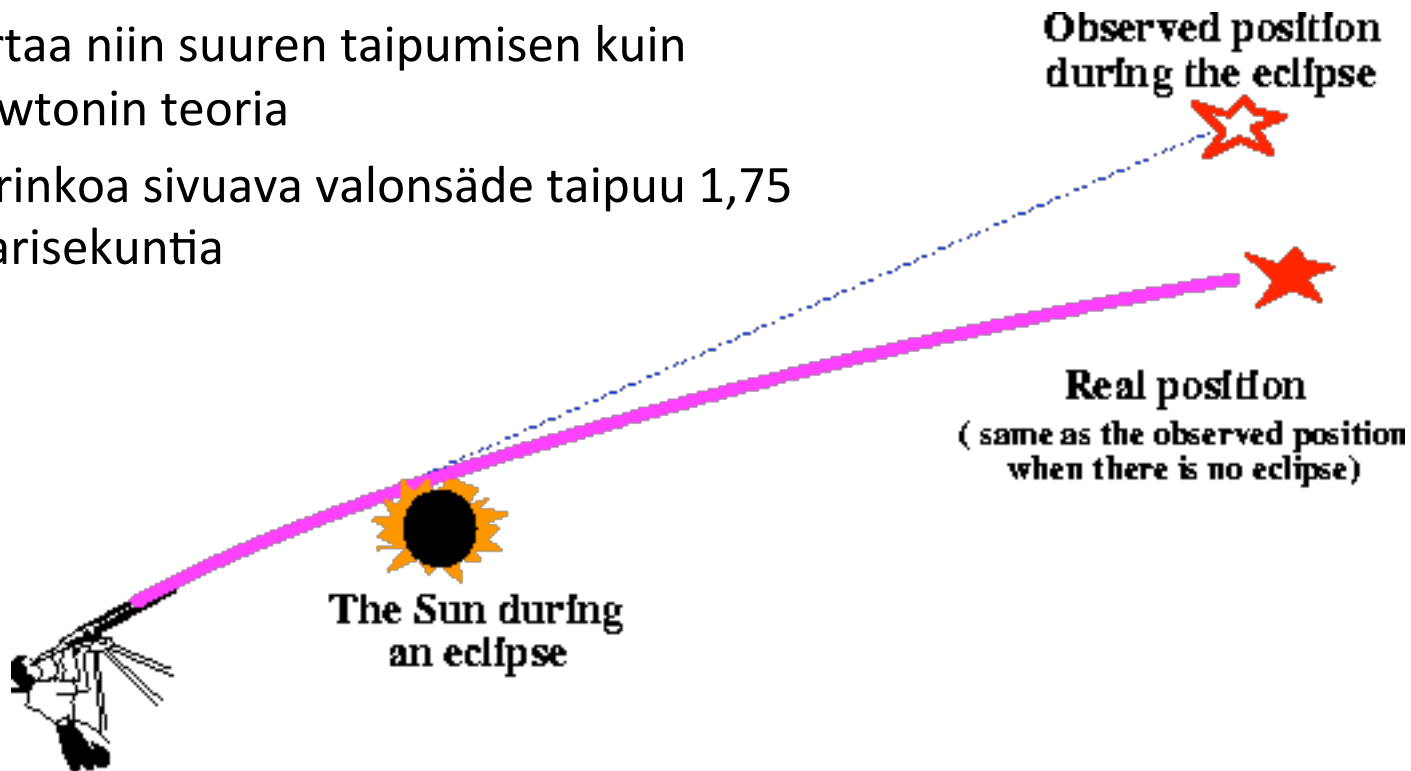
Perihelin kiertymä

- Merkuriuksen radan kiertymä oli tunnettu: 574 kaarisekuntia vuosisadassa
 - Muiden planeettojen vaikutus selitti 531 kaarisekuntia
 - Yleinen suhteellisuusteoria antaa lisäefektin 43 kaarisekuntia
- Ilmiö on havaittu myöhemmin myös Venuksen ja Maan radoissa ja kaksoistähdillä



Valon taipuminen

- Yleinen suhteellisuusteoria ennustaa kaksi kertaa niin suuren taipumisen kuin Newtonin teoria
- Aurinkoa sivuava valonsäde taipuu 1,75 kaarisekuntia



IX. *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations made at the Total Eclipse of May 29, 1919.*

By Sir F. W. DYSON, F.R.S., Astronomer Royal, Prof. A. S. EDDINGTON, F.R.S., and Mr. C. DAVIDSON.

(Communicated by the Joint Permanent Eclipse Committee.)

Received October 30,—Read November 6, 1919.

[PLATE 1.]

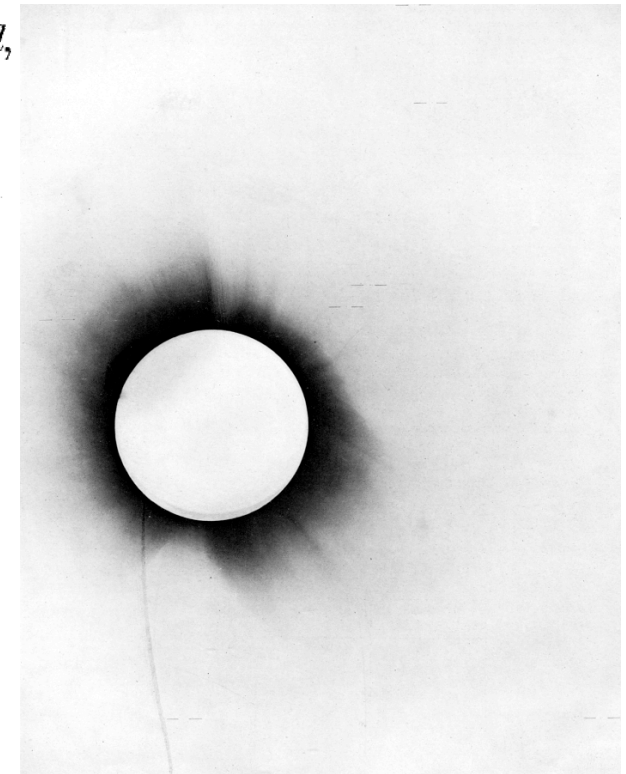
CONTENTS.

	Page
I. Purpose of the Expeditions	291
II. Preparations for the Expeditions	293
III. The Expedition to Sobral	296
IV. The Expedition to Principe.	312
V. General Conclusions	330

I. PURPOSE OF THE EXPEDITIONS.

1. THE purpose of the expeditions was to determine what effect, if any, is produced by a gravitational field on the path of a ray of light traversing it. Apart from possible surprises, there appeared to be three alternatives, which it was especially desired to discriminate between—

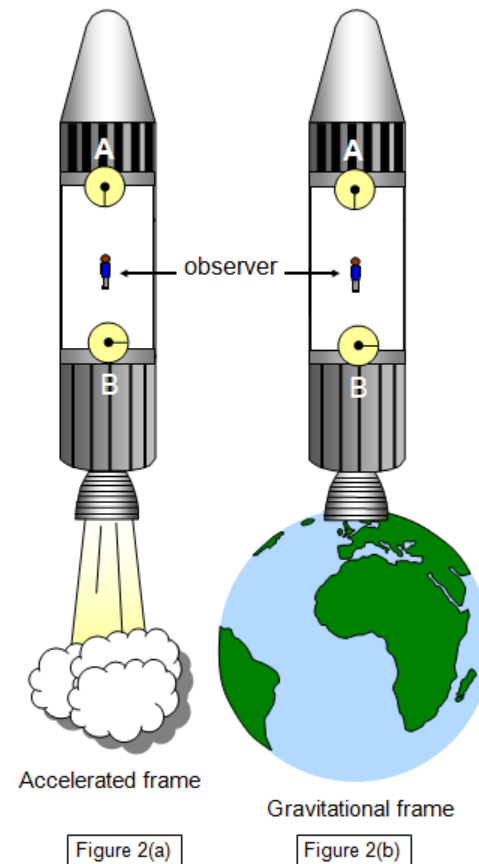
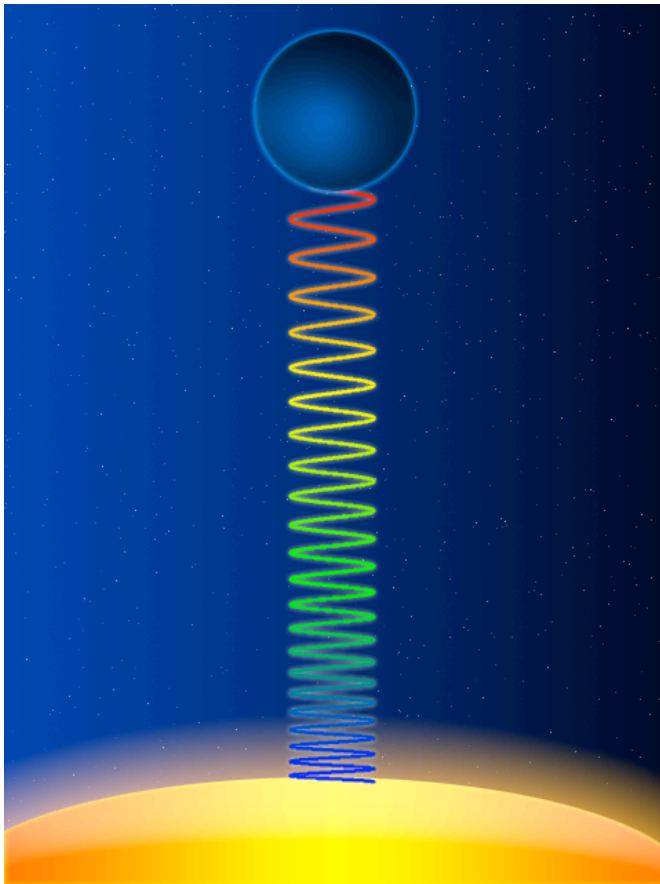
- (1) The path is uninfluenced by gravitation.
- (2) The energy or mass of light is subject to gravitation in the same way as ordinary matter. If the law of gravitation is strictly the Newtonian law, this leads to an apparent displacement of a star close to the sun's limb amounting to $0''.87$ outwards.
- (3) The course of a ray of light is in accordance with EINSTEIN'S generalised relativity theory. This leads to an apparent displacement of a star at the limb amounting to $1''.75$ outwards.



Sobral $1''.98 \pm 0''.12$
 Principe $1''.61 \pm 0''.30$

Gravitaatiopunasiirtymä

- Seuraa suoraan ekvivalenssiperiaatteesta
 - fysiikka paikallaan (siis ei vapaasti pudoten) gravitaatiokentässä = fysiikka kiihtyvässä liikkeessä olevassa systeemissä (Doppler-efekti)



Gravitaatiopunasiirtymä

- Pound ja Rebka 1959

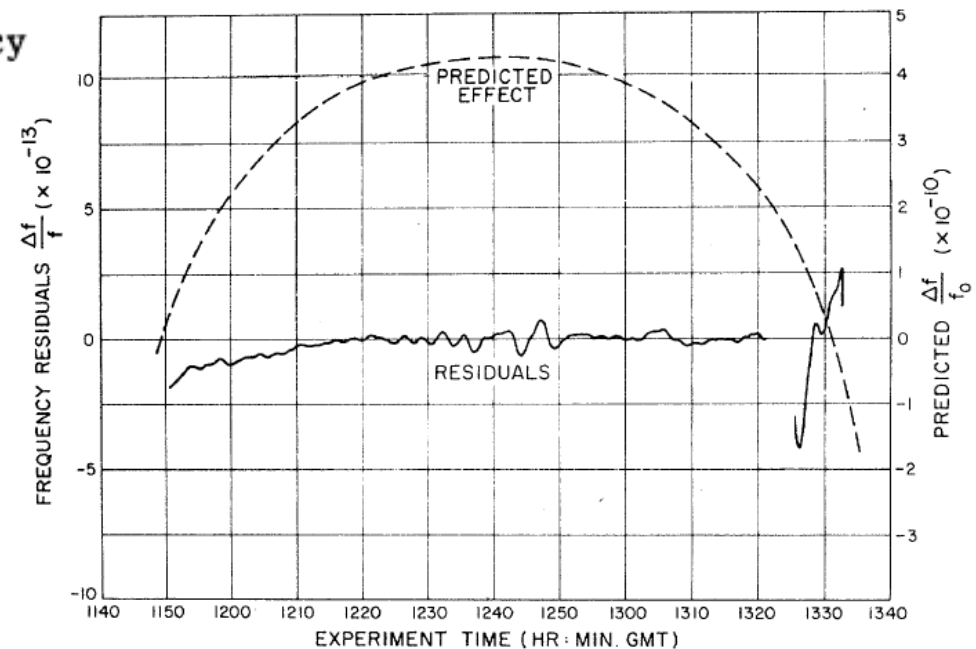
rection, yield a net fractional shift, $-(5.13 \pm 0.51) \times 10^{-15}$. The error assigned is the rms statistical deviation including that of independent sensitivity calibrations taken as representative of their respective periods of operation. The shift observed agrees with -4.92×10^{-15} , the predicted gravita-

Expressed in this unit, the result is

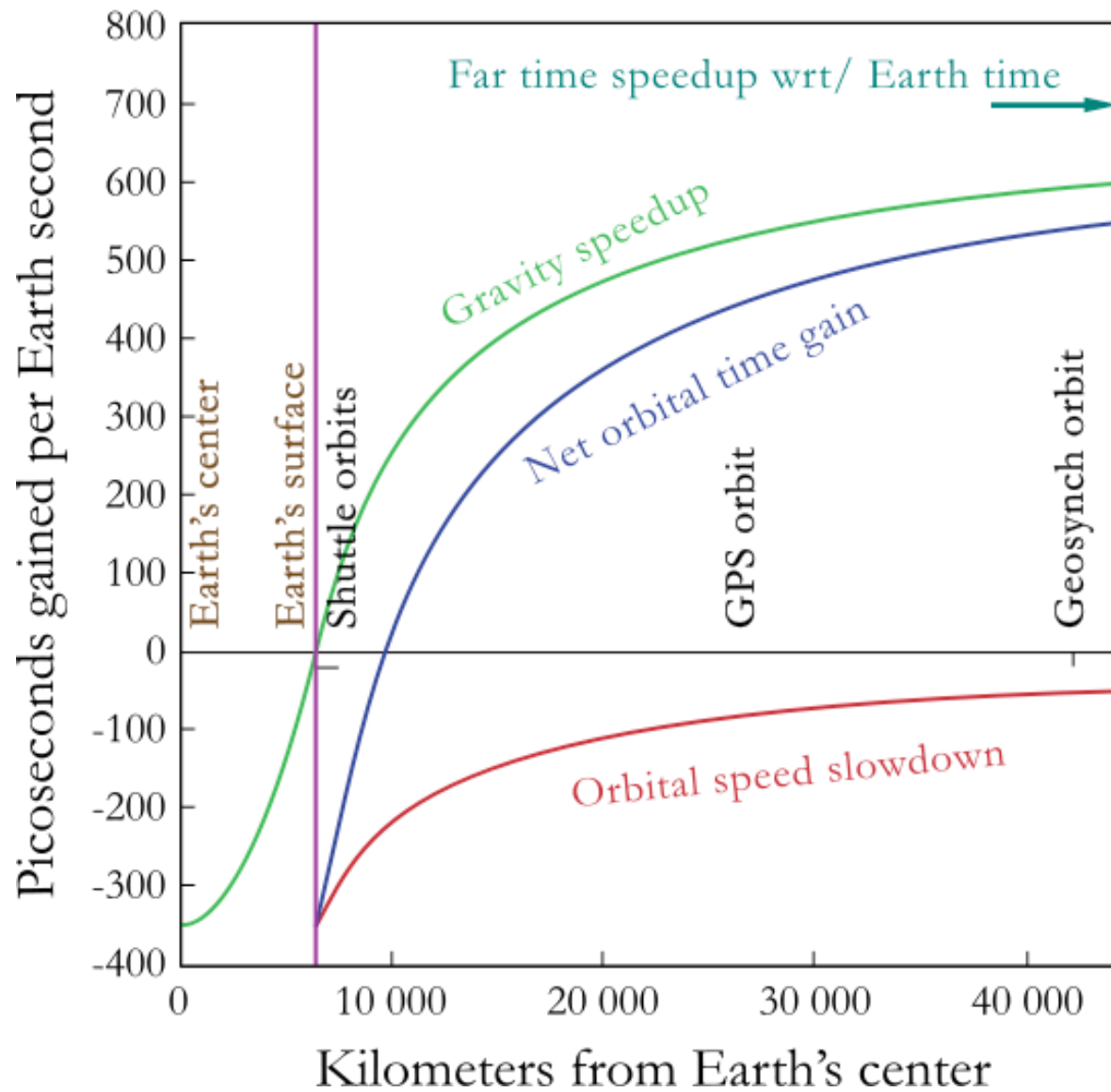
$$(\Delta\nu)_{\text{exp}}/(\Delta\nu)_{\text{theor}} = +1.05 \pm 0.10,$$

where the plus sign indicates that the frequency increases in falling, as expected.

- Vessot et al. 1980
 - raketti 10 000 km korkeuteen
 - tarkkuus 70 miljoonasosaa



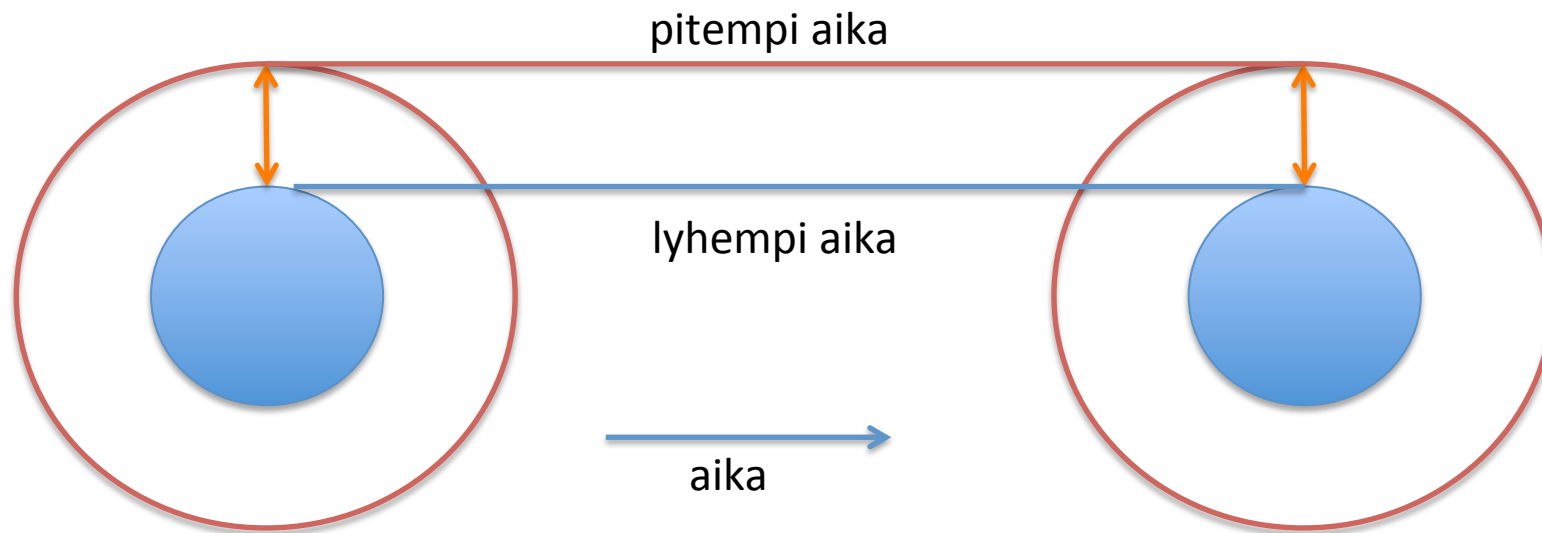
Time Dilation Effects on Earth



Wikipedia: Gravitational time dilation

Ajan hidastuminen?

- Gravitaatiopunasiirtymässä signaali vastaanotetaan eri taajudella kuin se on lähetetty
- Ikäänkuin lähettäjän ja vastaanottajan aika kuluisi eri tahtiin, syvemmällä gravitaatiokuopassa hitaammin
- Oikeasti ei kuitenkaan kummassakaan päässä paikallisesti tapahdu mitään: gravitaatio ei “vaikuta kelloihin”
- Kyse on aika-avaruuden globaalista geometriasta



Yleisen suhteellisuusteorian klassiset testit

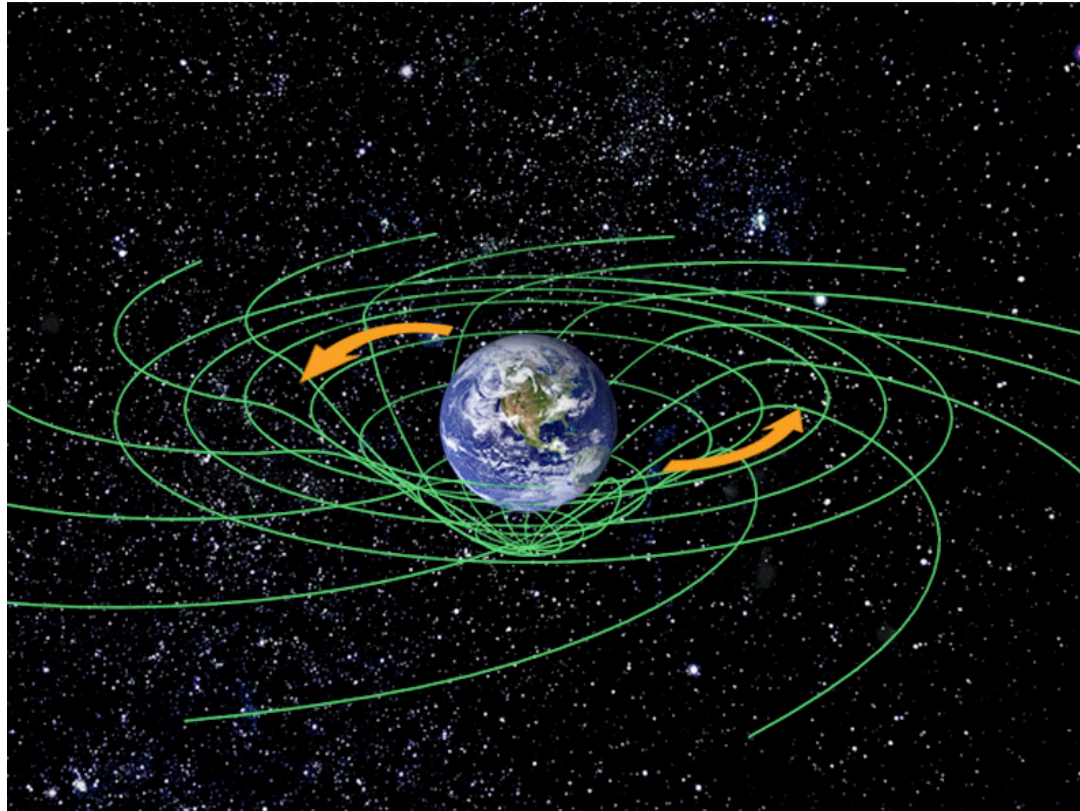
- Merkuriuksen perihelin kiertymä
- Valon taipuminen auringon painovoimakentässä
 - havaittu nykyään radiointerferometrialla (Fomalont et al. 2009)
 $0,9998 \pm 0,0003$ kertaa yleisen suhteellisuusteorian tulos
- Gravitaatiopunasiiirtymä: ajan “hidastuminen”
 - mitattu 70 miljoonasosan tarkkuudella
- Muitakin testejä aurinkokunnassamme
 - monissa mitattu yleisen suhteellisuusteorian ennustama poikkeama Newtonin teorian tuloksesta paremmalla kuin tuhannesosan tarkkuudella
- Kaikki nämä testaavat vain Schwarzschildin metriikkaa heikon gravitaation tapauksessa
 - staattinen pallosymmetrinen kenttä

Yleisen suhteellisuusteorian modernit testit

- Klassisten testien tarkemmat versiot
- Dynaamiset ilmiöt
 - stationaarinen pyöriminen
 - gravitaatioaalto
- Vahvan kentän ilmiöt
 - kaarevuus tarkastelualueella merkittävää
 - mustat aukot ja neutronitähdet
 - kosmologia

Pyörivän massan vaikutus

- Pyörivä massa “vääntää” avaruusajan geometriaa pyörimissuuntaan: Lense-Thirring ilmiö eli frame dragging
 - vapaasti putoavan kappaleen rata kääntyy tähän suuntaan
 - vapaasti putoava gyroskooppi kääntyy



Gravity Probe B, laukaisu 2004

Guide Star
IM Pegasi
(HR 8703)

Frame-dragging Precession
39 milliarcseconds/year
(0.000011 degrees/year)

Geodetic Precession
6,606 milliarcseconds/year
(0.0018 degrees/year)

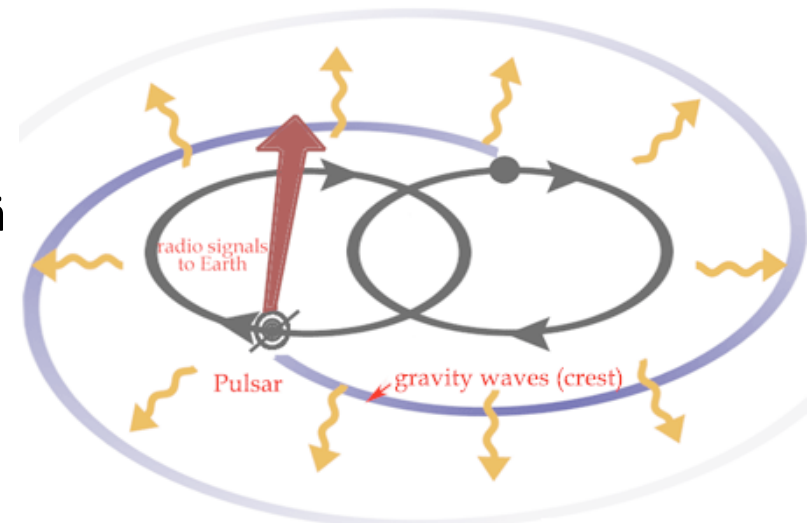
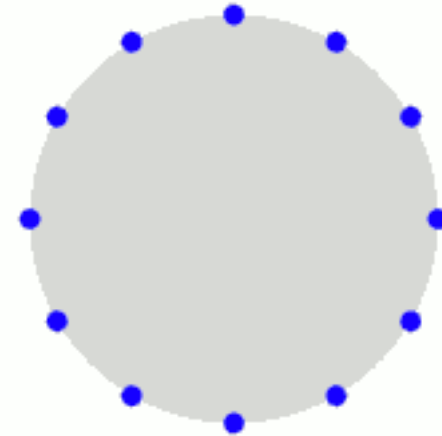
642 kilometers
(~400 miles)

$$\Omega = \underbrace{\frac{3GM}{2c^2 R^3} (\mathbf{R} \times \mathbf{v})}_{\text{Geodetic Precession}} + \underbrace{\frac{GI}{c^2 R^3} \left[\frac{3\mathbf{R}}{R^2} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{R}) - \boldsymbol{\omega} \right]}_{\text{Frame-dragging Precession}}$$

Tulos julkaistiin 2011: frame-dragging havaittu 20% tarkkudella

Gravitaatioaalto

- Yleinen suhteellisuusteorian ennustaa gravitaatioaalloja
 - muutokset aika-avaruuden kaarevuudessa etenevät valonnopeudella
- Merkittäviä lähteitä:
 - kompaktit kaksoistähdet
 - supernovaräjähdykset
- Toistaiseksi havaittu vasta epäsuorasti
- Hulse ja Taylor 1975
 - kaksoisneutronitähti PSR B1913+16
 - kiertorata supistuu: systeemi menettää energiaa sen verran kun gravitaatioaaltojen pitäisi viedä mukanaan



Gravitaatioaaltoantennit

- Perustuvat laserinterferometriaan
- LIGO: kaksi observatoriota Yhdysvalloissa
 - käynnistyi uudestaan 2015 perusparannuksen jälkeen
- VIRGO: yksi observatorio Italiassa
- Ei vielä havaintoja, mutta realistista odottaa lähivuosina



Kosmologia

- Vasta yleinen suhteellisuusteoria teki mahdolliseksi koko maailmankaikkeuden fysikaaliset mallit
- Ennusti dynaamisen maailmankaikkeuden: laajenee tai supistuu
 - laajeneminen havaittiin: Hubble 1929
- Gravitaation vaikutuksesta laajenemisen pitäisi hidastua
- 1990-luvun lopulla havaittiin, että laajeneminen kiihtyy
- Yksinkertaisin selitys: kosmologinen vakio Λ
 - vaikutus “repulsiivinen” eli laajenemista kiihdyttävä

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

- voidaan tulkita tyhjiöenergiana
- Ongelma: Kosmologisen vakion arvo oudon pieni – muita selityksiä:
 - tyhjiöenergian sijasta dynaaminen kenttä: “pimeä energia”
 - yleisen suhteellisuusteorian perusteellisempi rukkaaminen suurilla skaaloilla

Euclid – ESA:n seuraava kosmologiasatelliitti

- Laukaisu 2020
- Laajakulmainen avaruuskaukoputki
- Kartoittaa kuuden vuoden aikana yli kolmasosan taivaasta ja kolme neljäsosaa maailmankaikkeuden historiasta
- Mittaa maailmankaikkeuden laajenemishistorian ja rakenteiden (galaksijoukkojen) kasvun
- Tavoitteena erottaa, onko kyseessä kosmologinen vakio, pimeä energia, vai gravitaatiolain poikkeama yleisestä suhteellisuusteoriasta

