Aatos Lahtinen Luonnonfilosofian seura 17.4.2018

MITÄ MATEMATIIKKA ON?

Alkusarastus

Me emme tiedä, milloin matematiikka alkoi tulla ihmisen tietoisuuteen. Varhaisin todiste laskutaidosta on Tšekistä löydetty 30.000 vuotta vanha luu, jossa viisittäin ryhmiteltyjä viivoja eli ”tukkimiehen kirjanpitoa”.

Kirjoitustaito keksittiin noin 3000 eaa. Tuhat vuotta myöhemmin alkaa sekä Egyptissä, Babyloniassa, Intiassa että Kiinassa ilmestyä teksteihin aritmeettisia laskuja sekä, oikeita tai lähes oikeita, pinta-ala- sekä tilavuuskaavoja. Kaikki esiintyivät vain keittokirjamaisessa hyötykäytössä. Käyttäjillä ei liene ollut mitään käsitystä siitä, että ne olivat palasia yleisemmästä kokonaisuudesta.

Aamunkoitto

Noin 600 eaa. kreikkalaiset alkoivat tutkia matemaattisia ilmiöitä vain niiden itsensä vuoksi ilman mitään hyötynäkökohtia. Miletolainen **Thales (624-548 eaa.**) on tiettävästi ensimmäinen, joka keksi, että tuloksen voi todistaa oikeaksi.

Myyttinen **Pythagoras (582-496 eaa.)** otti käyttöön nimitykset matematiikka ja matemaatikko. (kreikan mathema tarkoittaa tietoa tai oppimista, ja mathematias = halukas oppimaan.) Pythagoraan matematiikka oli nykykoulutermein aritmetiikkaa, algebraa ja geometriaa ja Pythagoraan mielestä **maailma koostui numeroista**, ts. kokonais- tai murtoluvuista. Muuten: Pythagoraan teoreema oli tunnettu ainakin Kiinassa jo ennen Pythagorasta.

Pythagoras perusti oman veljeskunnan tutkimaan matematiikkaa ja filosofiaa. Tämä veljeskunta löysi matematiikan rakennetta koskevan omituisuuden**.** Heille numeroiden maailma oli koostunut vain kokonais- ja murtoluvuista. Kuitenkin ilmeni, että neliön halkaisijan pituuden suhde sivun pituuteen ei ollut kokonais- eikä murtoluku. Kerrotaan, että tämän löytäjä teki itsemurhan ja että veljeskuntaa kiellettiin mainitsemasta tätä kammottavaa tosiasiaa kenellekään ulkopuoliselle. Tosiasia oli kuitenkin hyväksyttävä: *myös nämä uudet suhteet ovat numeroita.*
Näin irrationaaliluvut tulivat matematiikkaan.

Matematiikan kehittämisessä oli Kreikassa eräs huomattava käytännön vaikeus. Aritmetiikka ja algebra oli vaikeaa onnettoman numeromerkinnän vuoksi (numeroita merkittiin kirjaimilla, a=1, b=2 jne). Tämän vuoksi kreikkalaiset keskittyivät geometriaan

Aksiomatisointia

Kreikkalaisen matematiikan huippu oli Aleksandrialaisen matemaatikon **Eukleideen** (n. 325 – 265 eaa.) teos **Stoikheia** (Elementa, Alkeet). Siihen Eukleides oli koonnut pääosan sen aikaisesta geometrian tietämyksestä. Lisäksi teoksen rakenteessa oli merkittävä edistysaskel. Stoikheian kaikki tulokset perustuivat viiteen perusaksiomaan, esimerkiksi

- asiat, jotka ovat samat kuin jokin asia, ovat myös keskenään samat

ja viiteen peruspostulaattiin, esimerkiksi

- on mahdollista piirtää suora mistä hyvästä pisteestä mihin hyvänsä pisteeseen.

Stoikheia oli ensimmäinen esitys, missä matematiikkaa rakennettiin deduktiivisesti kerros kerrokselta tietyistä perusaksiomista lähtien.

Stoikheiaa käytettiin pienin muunnoksin geometrian oppikirjana yli 2000 vuotta! Minullekin opetettiin olennaisesti sen perusteella geometriaa vielä 1950-luvulla! Tämä pitkäikäisyys on oiva osoitus matematiikan ainutlaatuisesta kyvystä tuottaa ikuisesti kestäviä tuloksia. Tällaisesta ei mikään muu tiede voi kehua.

Pimeä keskiaika

Sen jälkeen, kun Pontius Pilatus oli pessyt kätensä, kristinusko alkoi mullistaa maailmaa monella tavalla. Se hävitti surutta hellenistisen sivistyksen pakanallisena harhaoppina. Vain Aristoteles sai jostain syystä armon. Uskonnon nimissä rajoitettiin kaikkea henkistä elämää. Myös matematiikka joutui mustalle listalle. Mainitsen tästä vain kaksi esimerkkiä.

Varhaisin nimeltä tunnettu naismatemaatikko oli Aleksandriassa vaikuttanut **Hypatia** (355-415 jKr). Kristityt katsoivat hänen olevan liitossa paholaisen kanssa, sillä eihän nainen muuten voisi olla noin etevä. Niinpä lopulta fanaattisen papin kiihottama väkijoukko raastoi hänet vaunuistaan ja pahoinpiteli kuoliaaksi. Matemaatikon ammatti voi siis olla vaarallinen.

Kirkkoisä **Augustinus** (354 – 430) totesi jyrkästi, että kristityn pitää varoa matemaatikkoja. *On suuri vaara, että matemaatikko on tehnyt paholaisen kanssa sopimuksen saattaakseen kristityn helvetin pauloihin.* Siis myös matemaatikot voivat olla vaarallisia.

Pimeänä keskiaikana ei matematiikasta kuulunut mitään uutta Euroopassa. Onneksi arabiankielinen maailma kiinnostui hellenistisestä sivistyksestä. Monet kreikkalaiset matemaattiset tekstit ovat säilyneet meille vain arabiankielisinä käännöksinä. Siihen aikaan arabiankielinen maailma oli avarakatseinen ja edistyksellinen!

Jälleensyntyminen

Renessanssi päätti pimeän keskiajan ja myös matematiikan harrastus jälleensyntyi.
Italialainen **Cardano** (1501-1570) julkaisi kolmannen asteen yhtälön ratkaisukaavat. Niistä löytyi ongelma. Nimittäin tapauksissa, joissa yhtälöllä oli kolme reaalijuurta, kaavat olivat kahden kohdalla merkityksettömät, koska niissä piti ottaa neliöjuuria negatiivisista luvuista.

Cardano halusi kuitenkin pitää kiinni kaavoistaan. Lopulta hän huomasi, että jos tällaisia neliöjuuria käsitellään ikään kuin ne olisivat oikeita lukuja, ne supistuvat pois loppusievennyksessä ja saadaan oikea lopputulos. Tätä Cardanon käsittelytapaa pidettiin pitkään hulluutena. Siitä huolimatta ensimmäiset kompleksiluvut olivat nähneet päivänvalon.

Analyysin syntyminen

Renessanssin jälkeen matematiikan tutkimus jatkoi uusien ihmeellisyyksien tuottamista. Eräs ihmeellisyys sai myöhemmin nimen analyysi.

Jo **Arkhimedes** (287 – 212 eaa) oli itse asiassa päätynyt integraalin käsitteeseen pinta-alamäärityksissään, mutta hänen jälkeensä tuli yli tuhatvuotinen tauko. Vasta 1600-luvulla mm. Fermat kiinnostui käyrän tangentin määrittämisestä sekä käyrän ja akselin rajoittaman alueen pinta-alasta. Hänen viitoittamaansa tietä seuraten Newton – ja hänestä riippumatta Leibniz – päätyivät uuteen ihmeellisyyteen: *differentiaali- ja integraalilaskentaan*. Heidän päättelynsä oli tosin epätäydellistä, suorastaan heuristista. Mitä pitäisi oikein ajatella

- hyvin pienten suureiden osamäärästä, kun suureet tulivat pienemmiksi ja pienemmiksi
- hyvin kapeiden suorakaiteiden pinta-alojen summasta, kun kapeus pieneni ja pieneni?

Tämä epämääräisyys sai monet matemaatikot epäilemään koko systeemin mielekkyyttä.

Kiivaimpia vastustajia oli, Cloynen piispa Berkeley, myös matemaatikko. Hänen matemaattinen kritiikkinsä oli aivan aiheellista. Sen motiivina ei ollut kuitenkaan analyysin täsmällisyys, vaan se, että kelpo piispasta Newtonin yritys luoda matematiikan avulla maailmanjärjestys oli tuomittavaa harhaoppia. Järjestys on yksin Jumalan käsissä.

Newton julkaisi 1687 tuloksensa teoksessa **Principia**, täydelliseltä nimeltään **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica** eli **Luonnonfilosofian matemaattiset perusteet.** Ehkä juuri Berkeleyn kritiikin vuoksi Principian todistukset ovat yksinomaan geometrisia, ilman ensimmäistäkään analyysin käsitettä. Todistusten ymmärtäminen aiheutti harmaita hiuksia matemaatikoille.

Cauchy

Analyysin teorian järjesti kestävälle pohjalle vasta yli 100 vuotta myöhemmin ranskalainen **Cauchy** (1789 – 1857). Hän määritteli keskeiset käsitteet täsmällisesti niiden kuuluisien epsilonin ja deltan avulla, joita Cauchyn jälkeiset yliopisto-opiskelijat ovat hartaasti inhonneet.

Cauchya meidän on muuten kiittäminen toisestakin asiasta, matemaattisen tekstin suppeudesta. Hänellä oli oikeus saada artikkelinsa julkaistuksi Tiedeakatemian julkaisusarjassa. Koska hän oli hyvin tuottelias, alkoivat julkaisusarjan painatuskulut kasvaa hälyttävästi. Tiedeakatemia päätti saada kulut kuriin ja kielsi neljää sivua pitemmän artikkelin julkaisemisen. Cauchy keksi oivallisen lyhennyskeinon. Hän korvasi todistuksia lakonisella huomautuksella: ”On helppo nähdä, että ….”

Joka tapauksessa analyysi asettui 1700-luvulla taloksi matemaattiseen kaanoniin suorastaan maailmanvalloittajan elkein.

Maailmanvalloitus

Pythagoras uskoi, että maailmassa kaikki liittyi matematiikkaan. Tosin hänen matematiikkansa oli vain numeroita ja geometriaa. Galilei julisti, että Luonnon suuri kirja on kirjoitettu matematiikan kielellä. Nämä olivat kuitenkin julistuksia, eivät päätelmiä. Matematiikan maailmanvalloitus alkoi varsinaisesti vasta analyysin voimalla.

Newtonin maailmajärjestys huipentui **Laplacen** teokseen Mecanique Celeste (1799 – 1805). Siinä maailmankaikkeus oli suuri kellonkoneisto, missä tähdet ja planeetat liikkuivat matematiikan määräämillä radoilla. Kerrotaan, että kun Laplace selitti kellonkoneistoaan keisari Napoleonille, tämä kysyi: ”Mainitsetteko maininneet kaiken luojan, Jumalan. Laplace vastasi, ettei hän tarvinnut sitä hypoteesia.

Kellonkoneisto sai ehkä suurimman riemuvoittonsa Neptunuksen löydössä. 1820-luvulla huomattiin, että Uranuksen radassa oli omituisia häiriöitä. Alettiin spekuloida, että ne voisivat johtua Uranusta kauempana olevasta planeetasta. **Le Verrier** laski 1846 hypoteettisen radan tälle planeetalle. Samana vuonna planeetta havaittiinkin parin asteen päästä lasketusta paikasta. Eräiden kiistojen jälkeen se sai nimen Neptunus.

Matematiikan maailmanvalloitus jatkui 1800-luvulla. Heräävät luonnontieteet hyödynsivät täysin mitoin sen tarjoamia uusia apuvälineitä. Matemaatikot puolestaan saivat virikkeitä luonnontieteiden ongelmista ja loivat uutta matematiikkaa.

Mitä matematiikka on 1

Olen jo maininnut moneen kertaan sanan matematiikka. Kuitenkaan en itse asiassa ole puhunut vielä mitään itse matematiikasta.

Mainitsemani kokonais- ja murtoluvut, irrationaaliluvut, kompleksiluvut, geometria ja analyysi ovat vain matematiikan ilmenemismuotoja, eivät matematiikkaa. Nyt olisi jo aika yrittää kertoa, mitä matematiikka todellisuudessa on. Tehtävä ei ole helppo.

Roomalaisilla oli kaksikasvoinen Janus-jumala. Oli vaikea tietää, kummat olivat sen todelliset kasvot. Matematiikka on vielä monikasvoisempi mahtaja, josta on vaikea tietää, mitkä ovat sen todelliset kasvot. Asian selvittämistä vaikeuttaa se, että matematiikka on kuin jalokaasu, näkymätön, hajuton ja mauton. Lisäksi matemaattiset tekstit, joista matematiikan olemusta voisi tutkailla, ovat useimmille suljettu kirja, sillä ne on kirjoitettu matematiikan omituisella kielellä.

Matematiikan tosiolemus ei näy koulumatematiikassa, sillä koulussa opetellaan vain matematiikan apuvälineitä. Se ei selvästi näy edes yliopiston maisteriohjelmassakaan ei anna riittävästi apua. Nimittäin maisteriohjelmat ehtivät kertoa vain sen, mitä matematiikassa on aiemmin tehty, ei sitä mitä matematiikka on. Todelliseen matematiikkaan alkaa tutustua vasta väitöskirjavaiheessa, jolloin on luotava jotain uutta, jotain mitä ei ole ennen ollut olemassa. Silloin alkaa ymmärtää matematiikan olemusta:

Matematiikka on uutta luova, kumulatiivinen tiede, joka tutkii abstrakteja loogisia rakennelmia.

Uuden luominen tarkoittaa matematiikassa samaa kuin missä muussa luovassa toiminnassa tahansa. Säveltäjä luo uutta musiikkia, taiteilija luo uutta taidetta ja matemaatikko luo uutta matematiikkaa. Luomisprosessissa on kaikilla ensin visio, jota sitten yritetään toteuttaa, säveltäjä kynällä, taidemaalari siveltimellä ja matemaatikko logiikalla matematiikan sääntöjen puitteissa. Matematiikan luomisessa tavoitellaan tietysti, kuten muillakin luovilla aloilla, myös kauneutta. Lopputuloksen on oltava matemaattisesti kaunis.

Kumulatiivisuus merkitsee sitä, että uutta matematiikkaa luodaan vanhojen rakennelmien varaan. Ei kuitenkaan mitään siellä täällä hajallaan oleville rakennelmille. Matematiikka on yhtenäinen, valtava abstrakti katedraali, joka laajenee jatkuvasti.

Abstraktius merkitsee, paitsi näkymättömyyttä, myös sitä, että matematiikan rakennelmat eivät riipu meidän 3-ulotteisestä reaalimaailmastamme millään tavalla.

Tämä matematiikan näkymätön katedraali on jo yli 2000 vuotta kasvanut todellisuuden ulkopuolella yhä suuremmaksi ja suuremmaksi, ja kasvaa edelleen niin kuin ei koskaan ennen. Raamatun myyttinen Baabelin torni ja Dubain pilvenpiirtäjät ovat sen rinnalla pienempiä kuin hiekkajyväset Mont Everestin rinnalla. Lisäksi Matematiikan katedraalin lujuuslaskelmat ovat vertaansa vailla. Sen kaikki rakennelmat pienimmästä laastisaumasta suurimpaan torniin kestävät ikuisesti.

Matematiikan laajuus

Yritän nyt havainnollistaa tämän matematiikan näkymättömän katedraalin laajuutta ja kasvun määrää jollain konkreettisella tavalla.

Matematiikassa, aivan kuten muissakin tieteissä, uudet tulokset julkaistaan alan aikakausilehdissä. Näitä on maailmassa sadoittain, kaikilla valtakielillä, joskin englanti dominoi tälläkin alalla. Kaikkien merkittävien lehtien artikkelit referoidaan kahdessa kilpailevassa kansainvälisessä julkaisussa, amerikkalaisessa Mathematical Review:ssa ja/tai saksalaisessa Zentralblatt für Mathematik. Useimmat artikkelit ovat molemmissa.

Vuonna 1940 perustettu Mathematical Reviews, alkoi julkaista referaatteja uusista matemaattisista tuloksista kuukausittain ilmestyvässä lehdessä. Nyt kaikki vajaan 80 vuoden aikana ilmestyneet referaatit ovat elektronisessa tietokannassa.

- tietokannassa on tällä hetkellä n 3 miljoonaa referaattia,
- vuodessa referoidaan n 50.000 artikkelia uusista matemaattisista tuloksista

Uutta matematiikkaa siis luodaan jatkuvasti ja paljon.

Matematiikan monimuotoisuus

Matematiikan valtavassa katedraalissa on monenlaista matematiikkaa. Jotta tutkija helpommin löytäisi katedraalista häntä kiinnostavan matematiikan, on katedraalista tehty kartta. Se on matematiikan monikerroksinen luokitus osa-alueisiin. Luokituskartta on yleisessä käytössä. Sen voi tulostaa esimerkiksi American Mathematical Society:n kotisivuilta PDF-muodossa. Kaksipalstaisessa dokumentissa on 47 sivua, joissa on lueteltu viisimerkkiset koodit noin viidelletuhannelle matematiikan osa-alueelle. Tavallisen matemaatikon tutkimukset rajoittuvat vain muutamaan luokkaan.

Esimerkiksi minä olen tutkinut elliptisiä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä avoimilla Riemannin pinnoilla. Sille ei löydy (ainakaan vielä) omaa luokkaa, joten olen aina ilmoittanut, että työni kuuluu Riemannin pintojen osalta luokkaan 30F99 ja elliptisten yhtälöiden osalta luokkaan 35J15. Kuten esimerkistäni näkyy, ei jatkuvasti syntyvä uusi matematiikka aina noudata vanhaa luokkajakoa, joten sitä on aika-ajoin täydennettävä.

Matematiikan laajuus näkyy mm. siinä, että jos jossain matematiikan suuressa kansainvälisessä konferenssissa vaikkapa matematiikan professori menee umpimähkään seuraamaan jotain luentoa, on hyvin todennäköistä, ettei hän ymmärrä siitä alun jälkeen mitään.

Millainen määrä matemaatikkoja näitä tuhansia ja taas tuhansia artikkeleita tekee?
World Directory of Mathematicians -hakuteoksessa on yhteystiedot (lähes) kaikista matemaatikoista, joilla on vähintään kaksi Mathematical Review:ssä tai Zentralblattissa referoitua artikkelia. Teos paisuu vuosi vuodelta, viisi vuotta vanhassa oli noin 57.000 nimeä. Luovia matemaatikkoja on siis ainakin tämä määrä.

Näistä lukumääristä saa jotain käsitystä matematiikan katedraalin laajuudesta ja monimuotoisuudesta.

Järjestyksen aika

Olin 1990-luvulla Tieteellisten Seurain Valtuuskunnan hallituksessa, kun se suunnitteli tämän Tieteiden Talon peruskorjausta. Eräs huolenaiheitamme oli, onko talon vanha perusta edelleen kestävällä pohjalla. Onneksi osoittautui, että se oli kestävällä pohjalla. Samalla tavalla on tärkeää, että Matematiikan valtavan katedraalin perusta on kestävällä pohjalla. Mitä me tiedämme siitä?

Eukleides järjesti Stoikeiassaan geometrian aksiomaattiseksi järjestelmäksi, jolla tuntui olevan kestävä pohja. Tämän jälkeen kului parituhatta vuotta, ennen kuin matematiikan perusteista alettiin taas kiinnostua. Tulokset eivät aina olleet odotettuja.

Ensimmäiseksi tarkasteltiin uudelleen geometriaa. Kuten tiedätte, yksi Eukleideen peruspostulaateista alkoi vaivata matemaatikoita jo varhain. Se oli paralleelipostulaatti

- suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi tämän suoran suuntainen suora.

Tämä ei ollut aivan yhtä ilmeinen kuin muut postulaatit. Sitä yritettiin vuosisatojen ajan johtaa perusaksiomista, mutta turhaan. Lopulta alistuttiin ja ristittiin se aksiomaksi, paralleeliaksiomaksi.

Bolyai ja Lobatsewski

Lopulta 1820-luvulla Bolyai ja Lobatsewski alkoivat pohtia toisistaan riippumatta, mitä tapahtuisi, jos paralleelipostulaatti ei olisikaan voimassa ja lähtivät tutkimaan asiaa. Molemmat onnistuivat osoittamaan, että oli mahdollista konstruoida geometria, jossa kaikki Eukleiden aksiomat olivat voimassa, paitsi paralleeliaksioma.

Tämä uusi epäeuklidinen geometria tuli monelle matemaatikolle shokkina, jota ei edes uskottu. Tulos merkitsi, että Eukleides ei aksiomatisoinutkaan koko geometriaa, vaan ainoastaan yhden mahdollisista geometrioista.

Matematiikan katedraali sai uusia geometrian torneja. Eräs niistä, Riemannin differentiaaligeometria monistoilla, muutti jopa maailmankaikkeutta. Se oli juuri se geometria, mitä Einstein tarvitsi yleiseen suhteellisuusteoriaansa.

Hilbert

Palataan takaisin Eukleiden geometriaan. Saksalainen matemaatikko Hilbert totesi, että sen perusta ei ollut tyydyttävä, koska peruspostulaatit olivat reaalimaalimasta. Hilbert onnistui teoksessaan Grundlagen der Geometrie (1899) aksiomatisoimaan euklidisen geometrian, niin että siitä tuli reaalimaailmasta riippumaton abstrakti rakennelma. Hilbertin systeemissä pisteet ja suorat eivät olleet todellisia pisteitä tai suoria, vaan abstrakteja objekteja, joilla oli tietyt ominaisuudet.

Geometrian aksiomatisointinsa jälkeen Hilbert halusi laajentaa perustan tutkimista ja ehdotti projektia (ns. Hilbertin ohjelma), jossa koko matematiikka formalisoitaisiin aksiomista lähteväksi loogiseksi kokonaisuudeksi. Ohjelma jäi Hilbertiltä vain alkuasteelle, mutta se pani alulle matematiikan perusteita tutkivan **metamatematiikan** tutkimuksen, joka on edelleen aktiivinen.

Peanon aksiomat

Aritmetiikka ja geometria muodostivat ihmiskunnan ensimmäisen matematiikan. Siinä mielessä on luonnollista, että 1800-luvulla alettiin tutkia myös aritmetiikan aksiomatisointia. Alkusysäyksen antoi Grassmann, joka osoitti, että aritmetiikkaa voidaan generoida yksinkertaisista perusoperaatioista. Lopullisen muotonsa prosessi sai 1889 italialaisen Peanon teoksessa**: Aritmetices principia, nova methodo expósita.** Tämän perusaksiomia alettiin kutsua Peanon aksiomiksi. Huomionarvoista on myös, että teos on kirjoitettu Peanon muotoilemalla ”yksinkertaistetulla latinalla”, mistä hän, turhaan, toivoi tulevan tieteen yleinen kieli.

Välihuomautus: Pedagoginen katastrofi

Samaan aikaan osoitettiin, että Peanon aksiomat voidaan myös esittää joukko-opin avulla. Tästä oli noin 60 vuotta myöhemmin yllättävä seuraus. Pohjoismaisen matematiikan uudistuskomitea sai 1967 päähänsä, että aritmetiikan aksiomaattista perustaa pitäisi ottaa esille myös peruskouluopetuksessa joukko-opin keinoin. Suomikin lähti mukaan tähän täysin epäpedagogiseen hullutukseen.

Alaluokkien oppimääriin lisättiin joukko-opin opetusta ja tavallista yksinkertaista aritmetiikkaa alettiin opettaa joukko-opista lähtien alkioita ja unioneita käyttäen. Näin saatiin tavallinen selvä aritmetiikka epäselväksi ja vanhemmat hämmentyneiksi. Matematiikka pääsi yleiseen tietoisuuteen kuin ei koskaan ennen, ei tosin positiivisessa hengessä. Onneksi Suomessa järkiinnyttiin nopeasti. Jo vuonna 1976 palattiin takaisin entiseen järkevään aritmetiikan opetustapaan.

Russel ja Whitehead

Suomalainen pedagoginen katastrofi ei ollut ainoa joukko-opin katastrofi. Frege: (Grundgesetze der Arithmetik, 1893) alkoi vähän ennen Peanoa käsitellä aritmetiikan aksiomatisointia joukko-opillisesti. Eräs hänen työssään käyttämistään käsitteistä oli joukoista koostuva joukko. Fregen epäonneksi Russel osoitti, että joukkojen joukon käyttö ei ole riskitöntä.

Russelin paradoksi (1901): Olkoon R niiden joukkojen joukko, jotka eivät sisällä itseään. R joko kuuluu R:ään tai ei kuulu. Jos R kuluu R:ään, niin R:n määritelmän mukaan R ei voi kuulua R:ään. jos R ei kuulu R:ään niin R:n määritelmän mukaan R kuuluukin R:ään. Molemmissa tapauksessa kyseessä on ristiriita, joten tällaista joukkoa R ei voi olla olemassa.

Russel asetti sitten yhdessä Whiteheadin kanssa sitten tavoitteeksi Fregen epäonnistumisen korjaamisen sekä samalla paljon enemmän. He pyrkivät edellä mainitun Hilbertin ohjelman hengessä löytämään sellaiset aksiomat ja symbolisen logiikan päättelysäännöt, joista voitaisiin johtaa ei ainoastaan aritmetiikan aksiomatisointi, vaan peräti kaikki matemaattiset totuudet. Yritys oli hyvin kunnianhimoinen, ja onnistuessaan sillä olisi ollut valtava merkitys.

He alkoivat julkaista tuloksiaan moniosaiseksi tarkoiteussa kirjassa Principia Matematica (Newtonin päätyö oli Philosophiae Naturalis Principia Mathematica). Työn edistyessä kävi selväksi, että Russel ja Whitehead olivat oikeilla jäljillä. Suuri osa matematiikkaa olisi periaatteessa johdettavissa käytetyllä formalismilla. Avoimena pysyi kuitenkin kaksi peruskysymystä:

- oliko Principian systeemi ristiriidaton (ts. mitään ei voi todistaa sekä todeksi että epätodeksi)
- oliko Principian systeemi täydellinen (ts. jokainen väittämä voidaan todistaa joko todeksi tai epätodeksi).

Russelin ja Whiteheadin pohtiessa asiaa, sen ratkaisi yllättäen vasta 25-vuotias itävaltalainen matemaatikko Gödel 1931, muttei toivotulla tavalla. Hän teki Russelille ja Whiteheadille saman, minkä Russel oli aiemmin tehnyt Fregelle, todistamalla kaksi epätäydellisyysteoreemaa:

1. (Principian) (ja muun vastaavan systeemin) aksiomista lähtien ei voi todistaa systeemin ristiriidattomuutta
2. (Principian) (ja muun vastaavan systeemin) aksioomiin perustuvassa järjestelmässä on aina väittämiä, joita ei voi todistaa oikeiksi eikä vääriksi.

Tulokset merkitsivät, että Principia Matematica ei voinut saavuttaa lopullista päämääräänsä (eikä mikään muukaan vastaava yritys).

Gödelin tulokset olivat valtava isku matematiikan täydellisyyteen uskoville. Niiden mukaan matematiikan uljaan katedraalin perustasta tai uusien osien lujuuslaskelmista ei aina voidakaan olla täysin varmoja. Toisaalta monet uljaat goottilaiset katedraalit rakennettiin tutkimattomalle perustalle ja silti ne ovat edelleen pystyssä. Ei siis kannata hylätä kaikkea matematiikkaa vain sen takia, että täydellisyyteen emme ehkä voi päästä. Toisaalta, jokainen taiteilija tietää, että luomistyössä hyvin harvoin päästään täydellisyyteen.

Mystiikkaa

Matematiikan suuressa katedraalissa on myös melkeinpä mystisiä osia. Esittelen niistä kaksi.

Lukuihin on Pythagoraasta alkaen liitetty mystisiä piirteitä. Eräs uudemman ajan lukumysteeri koskee kolmea lukua:

- Neperin lukua e = lim $(1+1/n)^n$
- lukua π = ympyrän kehän suhde halkaisijaan
- lukua i eli -1:n neliöjuurta.

Nämä on määritelty toisistaan riippumatta, eikä niillä ole mitään näkyvää yhteyttä. Kuitenkin pätee:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Matematiikassa on ehkä jotain enemmän kuin mitä me vielä ymmärrämme.

Toinen mysteeri koskee valintoja. Saksalainen joukko-opin aksiomatisoija Zermelo tarvitsi vuonna 1904 erästä muunlaista todistustaan varten seuraavan aksioman:

Valinta-aksioma: Olkoon A mielivaltainen joukko joukkoja. Tällöin voidaan aina valita yksi alkio jokaisesta A:n joukosta.

Voidaan kysyä, miksi tällaisesta luonnollisen oloisesta valinnasta on pitänyt oikein tehdä aksioma. Asiaa valaisee se, että valinta-aksioman avulla voidaan todistaa seuraava tulos:

Banach-Tarskin paradoksi (1924): Kiinteä pallo voidaan leikata äärelliseen määrän osia niin, että osista voidaan koota kaksi alkuperäisen kanssa identtistä palloa.

Tämä paradoksi perustuu ns. ei-mitallisten joukkojen käyttöön. Tällaisia joukkoja ei voi konstruoida reaalimaailmassa. Näin ollen Banach-Tarskin paradoksilla ei valitettavasti ole käytännön sovellutuksia, niin hauskaa kuin se olisikin.

Mitä matematiikka on 2

Olen yrittänyt kuvailla matematiikan kasvoja sanomalla mm., että matematiikka on abstrakti näkymätön katedraali, jonka rakenteet eivät riipu todellisuudesta. Matematiikalla on myös toise kasvot, joita voidaan kuvailla sanomalla:

Matematiikka on muiden tieteiden ja teollistuneen yhteiskunnan erittäin hyödyllinen, suorastaan välttämätön työkalu.

Tämä hyödyllisyys tuntuu ristiriidalta sen kanssa, että olen sanonut matematiikan olevan abstrakti, loogisia rakenteita luova ja käsittelevä tiede, jonka rakennelmat ja tulokset eivät riipu todellisuudesta. Kuitenkin juuri todellisuudesta riippumattomuus tekee matematiikasta käsittämättömän tehokkaan todellisen maailman ongelmien ratkojan ja ilmiöiden kuvaajan.

Hyvin yksinkertainen esimerkki: Norsut ja hiiret ovat erilaisia, mutta aritmeettinen totuus: 1+1=2 pätee sekä norsuja että hiiriä laskettaessa. Sama pätee monimutkaisemmissa rakenteissa.

Lisäksi matematiikka sopii hyvin monen tieteen kieleksi, koska sillä voidaan ilmaista asioita ja prosesseja täsmällisesti ja yksikäsitteisesti. Tosin, kuten tiedämme, tätä etua ei saa ilmaiseksi, sillä matematiikan kieli vaatii ei-matemaatikolta opettelua siinä, missä mikä tahansa oudolla kirjaimistolla kirjoitettava vieras kieli.

Matematiikan käytännön hyödyntämisprosessi on, kuten tiedätte, pelkistettynä seuraava:

- Määritetään ensin tutkittavan reaalimaailman ilmiön ominaisuudet mahdollisimman tarkkaan.

- Sitten haetaan matematiikan abstraktista katedraalista sellainen rakenne, joka sopii ilmiön ominaisuuksiin ja kas,
- meillä on ilmiön matemaattinen malli,
- jonka ratkaisut antavat ilmiön käyttäytymisen.

Tehtävä ei juuri koskaan ole näin yksinkertainen. Sopivan matemaattisen rakenteen löytäminen valtavasta katedraalista ei yleensä ole helppoa. Samoin ei ole millään lailla selvää, että saatu matemaattinen malli osataan ratkaista. Oma ongelmansa on vielä matemaattisen mallin ratkaisujen tulkinta, mitä ne kertovat ilmiöstä.

Joka tapauksessa matematiikan hyödyntäminen monenlaisissa nyky-yhteiskunnan prosesseissa on arkipäivää.

Matematiikka hallitsee luontoa

Itse asiassa matematiikan hyödyntämisessä on muutakin kuin arkipäivä. Moneen kertaan varmistettu tosiasia on, että matemaattisilla malleilla voidaan hallita luonnonilmiöitä käsittämättömän hyvin. Esimerkkeinä voidaan mainita:

Newtonin lait
- maailmanjärjestyksen hyvä approksimaatio

Maxwellin yhtälöt
- on ihmeellistä, miten Maxwell päätyi jo 1861 neljään (osittaisdifferentiaali)yhtälöön, jotka mallintavat koko sähkömagneettisen luonnonilmiön (makroskooppisessa mittakaavassa)

Navier-Stokesin yhtälöt
- jo 1800-luvulla muodostetut yhtälöt hallitsevat ihmeellisen hyvin nesteiden ja kaasujen virtauksia

Einsteinin yleinen suhteellisuusteoria
- maailmankaikkeuden rakenne (paitsi gravitaatio)

Matemaattisten mallien erittäin hyvä todellisuuden kuvaamiskyky on kaukana itsestäänselvyydestä ja pakottaa ihmettelemään, mistä siinä oikeastaan on kysymys.
Ehkä Galilei olikin oikeassa, kun hän sanoi maailmankaikkeuden olevan kirjoitettu matematiikan kielellä. Myös nyky-yhteiskunta on täynnä matematiikkaa, kuten seuraavasta ilmenee.

Punainen tarra

Molièren näytelmässä *Porvari aatelismiehenä* päähenkilö porvari Jourdain ällistyy kuullessaan, että hän on koko ikänsä puhunut proosaa tietämättä sitä. Samalla tavalla monet ihmiset voisivat ällistyä kuullessaan, että he ovat koko ikänsä olleet jatkuvasti tekemisissä matematiikan kanssa tietämättä sitä.

Tätä asiaa ei voi suoraan nähdä, koska matematiikka on näkymätön, mauton ja hajuton. Ratkaisuna tähän professori Ian Stewart ehdotti taannoin, että matematiikan käytön yleisyyden voisi saada näkyväksi liimaamalla kaikkeen matematiikkaa käyttävään punaisen tarran ”Sisältää matematiikkaa”. Tarran saisi
- jokainen älypuhelin ja tietokone, CD-, DVD-, BlueRay-soitin ja TV
- jokainen myytävä auto, helikopteri, lentokone

- jokainen automaattihissi, jokainen tehdasrobotti
- Internet ja jokainen siinä toimiva sovellutus, kuten
- Google, Facebook, YouTube, pilvipalvelut
- jokainen vaaligallup, puolueiden kannatuskysely
- jokainen sääennustus
- jokainen kaupallisesti tuotettu vihannes ja salaatti
- jne

Lopulta koko maailma olisi täynnä punaisia tarroja. Toisin sanoen, matematiikka on yhteiskunnan kaikkialla läsnä oleva välttämätön osa.

Matematiikan kriisi 1900-luvun alussa

Matematiikan perinteinen hyötykäyttö ajautui vähitellen kriisiin teollisen vallankumouksen edetessä.

Aikojen alusta alkaen matemaatikot olivat sekä abstraktin katedraalin rakentajia että matematiikan hyötykäyttäjiä. Itse asiassa, reaalimaailmasta nousevat ongelmat olivat pitkään matematiikan katedraalin rakentajien innoituksen päälähde.

1800-luvun lopulla tilanne alkoi muuttua. Matematiikan katedraali oli kasvanut jo niin laajaksi, ettei kukaan enää voinut tuntea sen kaikkia rakenteita. Matemaatikot alkoivat erikoistua vain osaan katedraalia. Samaan aikaan monet käytännön ongelmat alkoivat tulla niin monimutkaisiksi, että niiden matemaattisia malleja ei enää osattu ratkaista eksaktisti. Monimutkaisuuden vuoksi numeerinen ratkaisu oli taas liian hankala käsin laskettavaksi. Tietokoneitahan ei vielä ollut. Tämä alkoi merkittävästi hidastaa luonnontieteiden ja teollisuuden kehitystä.

Hyvän esimerkin tarjoaa brittimatemaatikko Richardsonin sata vuotta sitten kehittämä seuraavan päivän sään ennustusmalli. Mallille ei ollut eksaktia ratkaisua ja kun numeerinen ratkaisu oli laskettu, oli se seuraava päivä jo illassa!

Tässä tilanteessa monet matemaatikot erikoistuivat vain matematiikan abstraktin katedraalin rakentamiseen. He eivät hakeneet innoitusta reaalimaailmasta eivätkä olleet kiinnostuneita mahdollisesta tulosten hyötykäytöstä. He alkoivat sanoa tutkivansa vain puhdasta matematiikkaa. Esimerkiksi englantilainen lukuteoreetikko Hardy (1877 – 1947) julisti 1920-luvulla olevansa ylpeä siitä, että hänen luomallaan matematiikalla ei ole eikä tule koskaan olemaan mitään hyötykäyttöä. Hardy kuoli onnekseen tai epäonnekseen ennen tietokoneiden läpimurtoa, eikä hän näin ehtinyt tietää, että hänen tuloksillaan on merkittäviä sovelluksia nykyaikaisessa kryptologiassa.

Tietokoneet matematiikan työkaluksi

Matematiikan soveltamisen kriisi jatkoi syvenemistään aina 1940-luvulle. Sitten ilmestyivät ensimmäiset tietokoneet. (Muuten, englanniksi se on computer eli ”laskin”, mutta Suomessa se nimettiin yleisemmin tiedon käsittelijäksi.)

Tietokoneiden nopeasti kasvavaa laskentatehoa käyttäen matematiikan sovellutukset alkoivat nousta uuteen kukoistukseen. Tietokoneiden avulla pystyttiin numeerisesti ratkaisemaan entistä hankalampia matemaattisia malleja. Tämä taas rohkaisi mallintamaan matemaattisesti entistä monimutkaisempia tilanteita. Esimerkiksi monia tuotteiden kehittämiseen käytettyjä käytännön testejä voitiin korvata nopeammilla ja halvemmilla tietokonesimulaatioilla, jotka perustuvat matemaattisiin algoritmeihin.

Saavutettu menestys sai jo optimistit kuvittelemaan, että tietokoneet tekevät matematiikan kaikkivaltiaaksi käytännön ongelmien ratkojaksi

Pian tietokoneet tuotiin myös matematiikan katedraalin työmaalle. Siellä on valtaisa määrä avoimia hypoteeseja, jotka odottavat todistusta oikeaksi tai vääräksi. Jälkimmäinen on tietysti helpompi, koska siihen riittää yhden ristiriitatapauksen löytyminen. Niinpä tietokonetta alettiin käyttää numeeristen vastaesimerkkien etsimisessä.

Erityisesti lukuteoriassa on lukuisia yksinkertaisesti muotoiltuja avoimia kysymyksiä, joita voidaan testata tietokoneella. Yksi niistä on Goldbachin hypoteesi: *Jokainen kahta suurempi positiivinen kokonaisluku voidaan kirjoittaa kahden jaottoman luvun summana.* Vastaesimerkkiä on haettu aina kokonaislukuun $n = 4*10^{18}$ asti löytämättä sitä. Tämä ei tietenkään riitä hypoteesin todistukseksi.

Seuraava tavoite oli yrittää ohjelmoida tietokone suorittamaan matemaattinen todistus. Tämä on jo huomattavan paljon vaikeampi tehtävä. Ensimmäinen tietokonetodistus oli 1976 suoritettu neljän värin ongelman ratkaisu.

Ongelman historiasta muutama sana. Englantilainen matemaatikko Guthrie 1852 katseli Englannin karttaa, joka oli väritetty kreivikunnittain niin, että kreivikunnat, joilla oli yhteistä rajaa, olivat eriväriset. Guthrie jäi pohtimaan, mikä on pienin mihin tahansa tällaiseen karttaan tarvittava värimäärä. Hän löysi nopeasti kartan, johon kolme väriä ei riitä. Seuraava kysymys oli, riittääkö neljä väriä.

Tämän tarkastelussa edistyttiin hyvin hitaasti. Sadassa vuodessa oli onnistuttu osoittamaan vain, että neljä väriä riittää muutamalla kymmenelle kreivikunnalle ja viisi riittää varmasti aina. Seuraavaksi osoitettiin topologian avulla 1950-luvulla, että riittää todistaa väite neljästä väristä kaikkien karttojen sijana vain 1482:lle ns. tyyppikartalle. Valitettavasti näidenkin läpikäynti olisi yli pitkälti 100-vuotinen työmäärä.

Sitten vuonna 1970 amerikkalaiset Haken ja Appel päättivät ohjelmoida tietokoneen käymään brutaalisti läpi näiden 1482 kartan kaikki mahdolliset rajat yhden kerrallaan. Viiden vuoden urakan jälkeen tietokoneohjelma valmistui 1975. Se käytti työhön 1200 h tietokoneaikaa. Lopputulos: neljä väriä riittää!

Tietokoneen luotettavuus

Tällainen tietokoneen suorittama todistus synnytti kiivaan keskustelun matemaattisessa maailmassa. Kuten tiedämme, matematiikassa todistus voidaan katsoa päteväksi vasta kun muutkin matemaatikot ovat käyneet sen läpi ja varmistuneet sen oikeudellisuudesta.

Tietokonetodistuksille ei näin voi juuri koskaan tehdä. Tietokoneen toiminnan voi yrittää varmistaa ajamalla ratkaisuohjelma toisella tietokoneella. Tällainen mm. tehtiin Haken ja Appelin artikkelille ennen julkaisupäätöstä. Se ei kuitenkaan poista sitä ongelmaa, että osa suoritusta on mustaa laatikkoa, jossa tapahtuvaa toimintaa ei voi tarkistaa, ainakaan äärellisessä ajassa.

Voiko siis tietokonetodistukseen luottaa? Kaikki matemaatikot eivät sitä tee. Lisäksi ns. matemaatikkojen yleinen mielipide ei pidä tällaisia todistuksia matemaattisesti kauniina, koska ne eivät perustu matemaattisiin päättelyihin, vaan ainoastaan raakaan voimaan.

Kuohunta tietokonetodistuksen ympärillä on vähitellen laantunut, mutta sen peruskysymys on nousemassa taas esiin uudessa yhteydessä: Voiko tekoälyn toimintaan luottaa? Emme vielä tiedä.

Kaaos

Kuten jo sanoin, tietokoneessa monet näkivät matemaattisen tehotyöläisen, jonka avulla maailmasta ja maailmankaikkeudesta voitaisiin toden teolla tehdä matemaattinen kellonkoneisto. Tämä alkoi kuitenkin nopeasti osoittautua liian optimistiseksi aatokseksi.

Harha alkoi paljastua jo 1961, kun meteorologi Edward Lorenz sattumalta keksi, että jotkut sään ennustamisen matemaattiset mallit olivat alkuarvojen suhteen epästabiileja. Mallilla oli kyllä matemaattisesti yksikäsitteinen ratkaisu, mutta jo pienen pieni muutos alkuarvoissa muutti lopputuloksen aivan toisenlaiseksi. Ilmiö sai nimen perhosefektiksi Lorenzin sanottua eräässä konferenssissa, että perhosen siiven isku Brasiliassa voisi aiheuttaa tornadon Texasissa.

Tällainen perhosefekti muuten toteutui konkreettisesti 1980-luvulla. Englantiin iski Atlantilta tullut hirmumyrsky, josta meteorologit eivät olleet varoittaneet. Aineelliset vahingot olivat huomattavat. Asiaa tutkittaessa osoittautui, että Atlantilla olevista säähavaintoasemista ei edes Englantia lähinkään sääasema ollut rekisteröinyt mitään sellaista, mitä olisi osattu epäillä myrskyn siemeneksi. Siinä vaiheessa myrsky oli siis vain ”perhosen siiven isku”.

Ajan oloon näitä perhosefektejä alkoi löytyä muistakin systeemeistä. Niitä tutkimaan syntyi taas uusi matematiikan ala, kaaosteoria. Tällaiset dynaamiset systeemit ovat alkuarvojen suhteen hyvin epästabiileja. Ne ovat yksikäsitteisesti ratkeavia vain teoriassa. Käytännössä niiden käyttäytymistä ei voi ennustaa tarkasti edes kvanttitietokoneella.

Perhosefektin vaikeuden suhteen ei ole syytä moittia matematiikkaa tai tietokoneita kyvyttömyydestä. Luontoäiti vain sattuu olemaan niin naisellinen, ettei haluaa hänen käytöstään aina ennustettavan edes matematiikan kristallipallolla.

Matematiikan ennustuskyky

Joskus matematiikalla on kyllä erityinen kristallispallo. Etenkin fysikaalisten tapahtumien matemaattisissa malleissa saattaa olla ratkaisuja, joita ei pysytä heti tulkitsemaan. Tällaiset ratkaisut ovat toisinaan paljastaneet todellisuudesta piirteitä, joita ei aiemmin ole tunnettu, eikä edes osattu odottaa.

Malliesimerkki on antimaterian löytyminen. Paul Dirac totesi 1920-luvulla, että Schrödingerin yhtälöllä on omituisia ratkaisuja, jotka ovat mielekkäitä vain, jos oletetaan elektronille positiivinen varaus. Tämän innoittamana Carl Anderson ryhtyi tutkimaan asiaa ja pystyi 1932 esittämään konkreettiset todisteet tällaisten ”positronien” olemassaolosta. Tämä laajeni nopeasti antimaterian löytymiseen.

Vaikuttaa siltä, että matematiikan suuressa katedraalissa on enemmän tietoa todellisuudesta kuin ihmisellä on. On kysyttävä uudestaan, mitä matematiikka oikeastaan on.

Mitä matematiikka on, 3. kasvot

Kaikkein oleellisin kysymys kuuluu: onko matematiikalla vielä kolmannet, muita täydellisemmät kasvot. Toisin sanoen:
luommeko me matematiikkaa, vai löydämmekö sitä.

Matematiikalla on ilmeisesti äärettömät abstraktit rakenteet ja sillä on ihmeellinen kyky mallintaa luonnon ilmiöitä tai suorastaan ennustaa niitä. Nämä seikat kallistavat mielestäni vaakakuppia siihen suuntaan, että **matematiikka on olemassa meistä riippumatta**.

Me emme siis olekaan matematiikan valtavan katedraalin rakentajia, vaan abstraktin avaruuden löytöretkeilijöitä, jotka vähän kerrallaan kartoitamme maailmankaikkeuden ihmeellistä matemaattista struktuuria. Struktuurin näkymättömyys tekee kartoituksen luovaksi työksi, visioiden varassa hapuiluksi matematiikan näkymättömässä maailmassa.

Tätä väitettä matematiikan universaalisuudesta on hieman vaikea todistaa oikeaksi. Periaatteessa väitettä on kyllä ryhdytty testaamaan: Joihinkin avaruusluotaimiin on sisällytetty löytäjän iloksi myös matemaattista informaatioita. Jos luotaimen löytänyt ET ymmärtää sen, on osoitettu, että matematiikka on olemassa meistä riippumatta. Tosin varmistuksen saamiseksi olisi vielä saatava kuittaus asiasta häneltä. Tämäkään ei ole mahdotonta, sillä viisaana olentona ET pystyy varmasti laskemaan, mistä luotain on lähetty. Toinen asia on, haluaako hän sitten ottaa yhteyttä tällaiseen sekasortoiseen planeettaan.

Jääkäämme siis odottamaan varmistusta siitä, mitä matematiikka todellisuudessa on!