

**MATEMATIIKAN JA LUONNONTIETEIDEN OPETUKSEN  
TUTKIMUSSEURAN TUTKIMUSPÄIVÄT 2014**

**ANNUAL SYMPOSIUM OF THE FINNISH MATHEMATICS  
AND SCIENCE EDUCATION RESEARCH ASSOCIATION 2014**

Peter Hästö & Harry Silfverberg (toim.)

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura r.y.

<http://www.protsv.fi/mlseura/>

ISBN 978-952-93-6404-6

2015

Kolmannetkymmenen ensimmäiset Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran tutkimuspäivät järjestettiin 1.–2.9.2014 Oulun yliopistolla. Kutsutut pääpuhujat olivat:

Jon R. **Star** (Harvard University)

*Promoting the Development of Procedural Flexibility*

Matthias **Stadler** (University of Bergen)

*Improving science and mathematics teaching – The SINUS professional development programme in Germany*

Samassa yhteydessä vietettiin LUMA Suomi kehittämisohjelman avajaisia ja valtakunnallista matematiikan opetuksen päivää.

Perinteiseen tapaan tutkimuspäivien osallistujille tarjottiin mahdollisuutta tarjota tutkimusartikkelia julkaistavaksi päivien konferenssijulkaisussa. Kaikki tarjotut artikkelit vertaisarvioitiin single-blind menettelyä käyttäen. Arviointiprosessin järjestämisestä vastasivat allekirjoittaneet, lukuun ottamatta artikkelia Toivola & Silfverberg johon viimeksi mainittu ei osallistunut.

Muutosten jälkeen hyväksyttiin kymmenen artikkelia julkaistavaksi. Valmis teos julkaistaan 29.10.2015 seuran tutkimuspäivillä Turussa.

Peter Hästö & Harry Silfverberg

The thirty-first Annual symposium of the Finnish mathematics and science education research association was held at the University of Oulu, September 1–2, 2014. The invited plenary speakers were:

Jon R. **Star** (Harvard University)

*Promoting the Development of Procedural Flexibility*

Matthias **Stadler** (University of Bergen)

*Improving science and mathematics teaching – The SINUS professional development programme in Germany*

Participants of the conference were offered the opportunity to submit a research article to the conference proceedings. All submitted manuscripts were evaluated with a single-blind referee-procedure.

After due changes ten articles were accepted for publication. The completed work will be published at the annual symposium in Turku, October 29, 2015.

Peter Hästö & Harry Silfverberg

# SISÄLLYS

## TABLE OF CONTENTS

|                                                                                                                                                                                                           |                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| Kriittisten toimintojen merkitys oppilaiden mallintaessa magnetismia<br><i>Sari Harmoinen</i>                                                                                                             | <a href="#"><u>1</u></a>   |
| Millaisia matematiikan opetustapoja luokan- ja aineenopettajaopiskelijat<br>pitävät tehokkaina?<br><i>Markus Hähkiöniemi, Mira Laitila &amp; Paula Penttinen</i>                                          | <a href="#"><u>13</u></a>  |
| The nature of teacher discourse during practical work in lower second-<br>ary physics education<br><i>Kaisa Jokiranta, Sami Lehesvuori &amp; Jouni Viiri</i>                                              | <a href="#"><u>23</u></a>  |
| Changing a pre-service teacher's beliefs about mathematics teaching<br>through recursive use of video stimulated recall<br><i>Raimo Kaasila, Sonja Lutovac &amp; Hannu Juuso</i>                          | <a href="#"><u>35</u></a>  |
| Opettajaopiskelijoiden matemaattisen opettajantiedon kehittäminen<br>opetusintervention avulla<br><i>Mika Koponen, Mervi Asikainen, Antti Viholainen &amp; Pekka Hirvonen</i>                             | <a href="#"><u>47</u></a>  |
| Lämpöopin toinen pääsääntö – Makro- ja mikroselitysten johdonmu-<br>kaisuus yliopistossa<br><i>Risto Leinonen, Mervi A. Asikainen &amp; Pekka E. Hirvonen</i>                                             | <a href="#"><u>61</u></a>  |
| Ongelmakentät keinona edistää oppilaiden matemaattista ymmärrystä<br>peruskoulussa<br><i>Erkki Pehkonen</i>                                                                                               | <a href="#"><u>71</u></a>  |
| Polyasta tunkkiin, tunkista Penrosen laatoitukseen: esimerkki merki-<br>tysnarratiivin rakentumisesta<br><i>Jaska Poranen &amp; Sari Yrjänäinen</i>                                                       | <a href="#"><u>81</u></a>  |
| Flipped learning –approach in mathematics teaching – a theoretical<br>point of view<br><i>Marika Toivola &amp; Harry Silfoerberg</i>                                                                      | <a href="#"><u>93</u></a>  |
| Teachers' CONCERNS and INTERESTS about teaching of "Responsible<br>Research and Innovation" - applying the Concerns-Based Adoption<br>model<br><i>Miikka de Vocht, Antti Laherto &amp; Ilka Parchmann</i> | <a href="#"><u>103</u></a> |

## KRIITTISTEN TOIMINTOJEN MERKITYS OPPILAIDEN MALLINTAESSA MAGNETISMIA

Sari Harmoinen

Oulun yliopisto

*Tässä tutkimuksessa selvitettiin 9. vuosiluokan oppilaiden muodostamien magnetismin mallien muutosta kuuden oppitunnin aikana. Oppilaat (N=47) opiskelivat kolmessa ryhmässä ja jokaisessa ryhmässä oli eri opettaja. Tutkimuksen teoreettinen näkökulma on konstruktivismissa, jota tukee sosiaalinen vuorovaikutus. Tutkimuksen lähtökohtana oli halu selvittää, miten opettajan oppimiseen antama tuki eli scaffolding vaikuttaa fysiikan oppitunneilla oppilaiden tuottamien magnetismin mallien muodostumiseen. Tulosten mukaan opettajan ohjatta oppilaiden ajattelua riittävän pienissä ja oppimisen kannalta oikea-aikaisissa kokonaisuuksissa, pystytään oppilaan mallin muodostumista tukemaan hyvin. Oppimisen takeena ei ole tehtävien määrällinen läpikäyminen vaan käytyjen tehtävien ymmärtäminen ja niissä esitettyjen asiasisältöjen ymmärtäminen.*

### JOHDANTO

Tutkimusaiheen valintaan vaikutti moni tekijä. Eräs syistä oli se, että magnetismi tarjoaa hyvän asiayhteyden tutkia, miten oppilaat kykenevät luomaan mallin asiasta, jota he eivät pysty suoraan näkemään. Magneetti on kuin musta laatikko, jonka rakenteellisia osia tai niitä osia, jotka aikaansaavat magneetin ominaisuudet, ei voida suoraan katsoa, mutta sen ympärillä tapahtuvia asioita voidaan havainnoida. Kuitenkin oppilailta usein edellytetään sitä, että he selittävät tieteellisesti tekemiään havaintoja. Magneettiset ilmiöt ovat tuttuja ja niitä käsitellään myös esimerkiksi maantieteessä Maan magneettikentän yhteydessä ja liikuntatunneilla hyödynnetään kompassin ja Maan magneettikentän välistä vuorovaikutusta suunnistuksessa. Magneetin vuorovaikutus rautakappaleiden kanssa on varmastikin kaikille tuttua, jopa niin, että monen mielestä myös sen perusteella tietää magneeteista kaiken.

Oppilaalle voi olla tuttuja ilmiöiden ja niiden tieteellisesti hyväksytyjen opetusmallien välisen yhteyden oppiminen, ymmärtäminen ja mentaalimallin muodostaminen haastavaa (Gilbert, Boulter & Rutherford, 2000; Greca & Moreira, 2002; Curpuz & Rebello, 2011). Oppilaille tulisikin pystyä esittämään uskottavia, perusteltuja selityksiä havainnoille ilmiöstä, joista he rakentavat mentaalimallia (Besson & Viennot, 2004). Opetusmallin yhteys havaittaviin ominaisuuksiin voi olla oppilaiden vaikea huomata itsenäisesti ja siksi opettajalla ja hänen toimillaan on oppilaiden oppimisen tukemiseksi suuri merkitys (Wertsch, 1991; Campoy, 2005). Puheen vaikutusta oppilaan oppimiseen ja luokassa olevan opettajan ohjaavien toimien vaikutusta oppilaan oppimiseen ei

ole tutkittu kovin paljon siitä näkökulmasta, että sen vaikutusta olisi mitattu oppilaiden tuottamien mallien avulla.

Magnetismiin liittyen opetustutkimusta on tehty hyvin vähän (esimerkiksi Guisalo, Almudí, Zubimendi, 2004; Borges & Gilbert 1998; Harmoinen, 2006). Useimmissa tutkimuksissa on keskitytty sähkömagnetismiin ja magneettisten ilmiöiden ymmärtämiseen. Niissä oli huomattu oppilaiden ymmärryksessä olevan virheitä, mutta syitä niihin ei ole selvitetty. Tutkimuksissa ei ole juurikaan selvitetty, miten oppilaat konstruoivat magnetismin malleja ja kuinka he kykenevät muuttamaan mallejaan todellisuutta vastaavaksi.

Magnetismi oli luonteva mallinnustutkimuksen aihe, koska siinä erityisesti korostuu mallien merkitys ja hyödyllisyys. Magneetin ominaisuudet ja ilmiöitä aikaan saavat ominaisuudet ovat niiden sisällä, hyvin pienissä rakenneosissa, joita ei voi erottaa tai irrottaa magneeteista (Guimarães, 2005). Magnetismiin liittyvien asioiden hahmottaminen ilman malleja voi olla hyvin vaikeaa, jollei jopa mahdotonta. Magnetismin ilmiöiden syyt ja opetusmallit ovat mikroskooppisella tasolla, mutta mallinnuksessa käytettävät havainnot tehdään makroskooppisella tasolla. Siksi on hyvin tärkeää, että siinä apuna käytetyt mallit tukevat havaintoja ja kattavat perustellusti keskeisimmät ilmiön osat. Oppilailla oleva ennakkokäsityksiin pohjautuva mentaalimalli toimii pohjana, jolle he lisäävät tietoa tai rakentavat sen tilalle kokonaan uuden mentaalimallin.

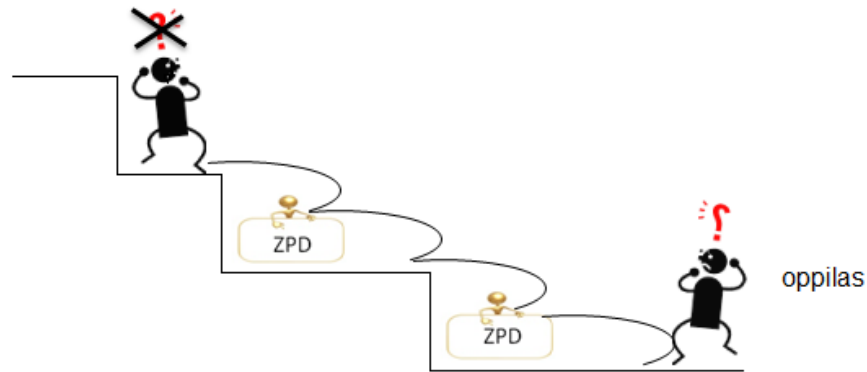
Tässä esitetyt tulokset ovat osa tekemästani väitöstutkimuksesta (Harmoinen, 2013).

## **TUTKIMUKSEN PÄÄMÄÄRÄT**

Oppilas tekee havaintoja kokeellisesta työskentelystä, mutta niiden yhteys opetusmalliin ja omaan ajatteluun ei välttämättä avaudu oppilaalle ilman tukea (Campoy, 2005). Mitä enemmän yhteyksiä opettaja pystyy luomaan uuden ja oppilailla jo olemassa tiedon välille, sitä helpommin ymmärrettäväksi uusi tieto oppilaille tulee (Rudduck & Flutter, 2008). Opettaja toimiikin tuolloin oppilaan ulkoisena prosessoijana, joka avaa tutkimuksessa esiin tulevan tiedon niin, että oppilas saa siihen kiinnekohtia aiemman tiedon kanssa. Oppilaan ajattelu on sisäinen prosessi, jolloin hän konstruoii asiaa ja siten sisäistää opiskeltavan asian omaksi, sisäiseksi tiedoksensa (Barnes, 2008). Näiden kahden prosessin väliin muodostetulla yhteydellä voidaan luoda tarkoituksenmukainen oppiminen (Ausubel & Robinson, 1969).

Kriittinen toiminto on opettajan oppilaille suuntaamaa ohjaus, joka auttaa oppilasta laajentamaan omaa ajattelua ja tietämystä. Kriittisen toiminnon toteutus ei ole ennalta suunniteltua ja ohjattua eikä toiminnon tule olla ennalta määrättyllä tavalla toteutettu. Kriittiseksi toiminto tulee siksi, että siinä oppilaille tarjottu asiasisältö auttaa ja ohjaa oppilasta saavuttamaan sisältörikkaamman mentaalimallin. Kriittinen toiminto toimii eräänlaisena apuportaana oppilaan

ajattelussa. Kuvassa 1 kuvataan opettajien tarjoamien apuportaiden merkitystä oppilaan oppimisessa.



*Kuva 1: Opettajan tarjoamien, apuportaina toimivien, kriittisten toimintojen merkitys oppilaan oppimisen etenemiselle.*

Kuvassa 1 olevat apuportaavat sijaitsevat oppilaan lähikehityksen vyöhykkeellä (ZPD) ja siksi opettajan tulee asettaa ne niin, että niiden avulla oppilas voi saavuttaa uutta tietoa. Apuportaita voidaan kutsua kriittisiksi toiminnoiksi, koska ilman niiden antamaa tukea oppilaan eteneminen on haasteellista. Kriittiset toiminnot poikkeavat muiden tutkijoiden (muun muassa Viennot, Chauvet, Colin & Rebman, 2005; Powell, Francisco & Mahelin, 2003; Myhill & Warrenin, 2005) esittämistä kriittisyyksistä siten, että kriittisessä toiminnossa on oleellista se, että opettaja huomioi oppilaan lähikehityksen vyöhykkeen (ZPD). Kriittisyyttä ei toiminnossa ole siinä olevan vuorovaikutuksen luonne, vaan ainoastaan sen oikeanlainen asiasisältö, sovitettuna opiskelun etenemisen kannalta oleelliseen sisältöön. Siksi kriittiselle toiminnolle ei voida osoittaa ennalta ajallisesti tarkkaan määrättyä paikkaa.

Tässä tutkimuksessa on pyritty selvittämään

1. Millaisilla kriittisillä toiminnoilla opetusryhmissä ohjataan oppilaiden magnetismin mallinnusta?
2. Miten kriittisten toimintojen esiintyminen vaikuttaa oppilaiden mallien muodostumiseen?

## TUTKIMUKSEN TOTEUTUS

Tutkimuksen kohteena olivat 9. vuosiluokan oppilaat ( $N = 47$ ), jotka jakautuivat kolmeen ryhmään ( $N_1 = 15$ ,  $N_2 = 15$  ja  $N_3 = 17$ ). Oppilaista oli tyttöjä 37 ja poikia 10. Tutkimukseen osallistui kolme opettajaa ja opettajille on annettu tutkimusnimet Hilma, Anneli ja Elina. Nimiksi on valittu naisten nimet, koska opettajan sukupuolen vaikutusta ei ole tutkittu. Opettajat olivat opettaneet ryhmäänsä

elokuusta 2010 lähtien, ja oppilasryhmien kokoonpanot olivat olleet samat elokuusta 2008 lähtien. Oppilaiden viimeisin todistuksessa ollut fysiikan arvosana on vuosiluokalta 8 ja kaikkien oppilaiden arvosanojen keskiarvo oli 7,9. Oppilasryhmien välillä ei ole merkittävää eroa fysiikan arvosanojen keskiarvoissa.

## **AINEISTON KERÄÄMINEN**

Opetusjakso toteutettiin samanaikaisesti kolmessa eri opetusryhmässä joulukuussa 2010. Ennen opetusjakson oppituntien alkamista pidettiin oppilaille alkutesti, jossa kartoitettiin heillä olevia mentaalimallejaan ja ennakkokäsityksiään magnetismista. Opetusjakso jakaantui kuuteen peräkkäiseen 45 minuutin oppituntiin. Aiheet etenivät siten, että magneettien ominaisuuksien tutkiminen lähti yleisistä magnetismin lajien luokitteluperusteista edeten havaittavista ominaisuuksista (vuorovaikutus, magneettikenttä ja dipolisuus) magneetin sisäisen rakenteen tutkimiseen.

Ensimmäisellä oppitunnilla oppilaat työskentelivät neljän hengen ryhmissä ja muilla oppitunneilla pareittain. Jos opetusryhmässä ei ollut oppitunnilla parilista määrää oppilaita, yksi opetusryhmässä oli kolmen hengen työskentelyryhmä. Näin kaikilla oppilailla oli työpari ja se mahdollisti yhteisen pohdinnan tutkimuksen aikana.

Tässä tutkimuksessa kerättiin tutkimusaineistoa kahdella eri tavalla. Opetusmateriaalina olleet oppilaslomakkeet toimivat kirjallisena materiaalina oppilaiden tuottamien mallien tutkimisessa ja oppituntien videotallenteiden avulla pyrittiin keräämään tietoa oppitunneilla esiintyvistä erilaisista vuorovaikutustilanteista.

## **AINEISTON ANALYYSI**

Tässä artikkelissa on tarkoitus keskittyä kolmen opettajan toimintaan opetusjakson oppitunneilla sekä havaittujen toimintojen ja oppilaiden ilmaistuja mallien muodostumisen välisen yhteyden tarkasteluun opettajan esittämien kriittisten toimintojen kautta. Niiden tarkoituksena on laajentaa oppilaiden ajattelua magnetismin mallin uuteen ominaisuuteen ja suunnata oppilaiden ajattelua vastaamaan magnetismin opetusmallia. Taulukossa 2 on esitetty oppilaiden mallien luokittelu.



Taulukko 2: Oppilaiden tuottamien mallien luokittelun ja malliin sisältyvät käsitteet.

| Mallin koodi ja numero | Mallin kuvaus                                                                                                  | Mallin käyttö ja siinä esiintyvät symbolit sekä käytetyn mallin tarkkuus                                                                                                                                       | Oppilaan mallissa olevat tieteellisen mallin elementit                                                                                       | Esimerkki oppilaan vastauksesta |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| NO (0)                 | Ei ilmaistua mallia tai ilmaistua mallia on virheellinen.                                                      | Ei ole ilmaistua mallia tai malli ei sisällä magnetismin rakenteeseen liittyviä ominaisuuksia.                                                                                                                 | Oppilaalla ei ole piirrosta tai esitetty piirros on täysin virheellinen.                                                                     |                                 |
| MVV (1)                | Magneetille on osoitettu vain vetovoimaominaisuus.                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>• magneettinen veto- ja poisto voima</li> <li>• vuorovaikutus</li> </ul>                                                                                                | Oppilaan piirroksessa osoitetaan magnetoidulla naulalla olevan voimia.                                                                       |                                 |
| DI (2)                 | Magneetilla on erilaiset päät.                                                                                 | <p>Magneetin päissä on jokin erilaisuutta osoittava merkintä, esim.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• plus ja miinus</li> <li>• N ja S tai P ja E</li> <li>• värein osoitettu erilaisuus</li> </ul> | Oppilas on piirtänyt magneetille päät tai puolikkaat. Oppilas on jollakin tavoin osoittanut pään olevan erilaiset.                           |                                 |
| MK (3)                 | Magneetin ympärillä on magneettikenttä                                                                         | <p>Edellisten lisäksi</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• magneettikenttä</li> <li>• magneetin ympärille</li> <li>• magneetin pään välille</li> <li>• kaareutuvia kenttäviivoja.</li> </ul>           | Oppilas on piirtänyt magneetilla olevan erilaisten pään lisäksi magneettikenttä ympärillä, jota hän kuvaa päistä lähtevillä kenttäviivoilla. |                                 |
| SIS (4)                | Magneetilla on sisäistä rakennetta.                                                                            | <p>Edellisten lisäksi</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• jollakin symbolilla osoitettu sisäinen rakenne</li> </ul>                                                                                   | Oppilas on edellisten lisäksi piirtänyt magneetille jonkinlaista sisäistä, ei-yksityiskohtaista rakennetta.                                  |                                 |
| SJR (5)                | Magneetin sisäisellä rakenteella on järjestäytyneisyys; vuorottelevat, erilliset, pään kaltaiset ominaisuudet. | <p>Edellisten lisäksi</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• sisäisessä rakenteessa on samanlaiset merkinnot kuin magneetin päissä</li> <li>• pään merkinnot vuorottelevat</li> </ul>                    | Oppilas on edellisten lisäksi piirtänyt magneetilla sisäisen ranteen, jossa samanlaiset, vuorottelevat osat kuin naulan päissäkin.           |                                 |

Taulukossa 2 olevien oppilaiden ilmaistujen mallien luokittelu perustuu magneetin rakenteellisiin osiin. Luokkien kuvaukset pohjautuvat siihen, miten opittunneilla oppilaan ajatellaan etenevän magnetismin mallin hahmottamisessa. Oppilaan vastauksen luokka tulkittiin sen mukaan, millä tarkkuudella siinä oli esitetty rakenteellisia yksityiskohtia ja sisällytetty taulukossa 2 on esitettyjä käsitteitä.

Kriittisien toimintojen valinnassa on kiinnitetty erityisesti huomiota siihen, miten opettaja sitoo magnetismin oppilastyön tutkimusvälineeseen, työn tarkoitukseen sekä havaintojen ja tuloksien tulkinnan. Opettajan rakentama yhteys havainnon ja oppilailla olevan tiedon välillä, antaa havainnolle merkityksen ja perustelun. Kriittisiksi nämä tulevat siksi, jos havainnon sisältö ei selkene oppilaalle, voi hänen olla vaikea antaa havainnolle merkitys ja siten muodostaa tehdyistä havainnoista tulkinta ja muodostaa siitä mallia (Campoy, 2005).

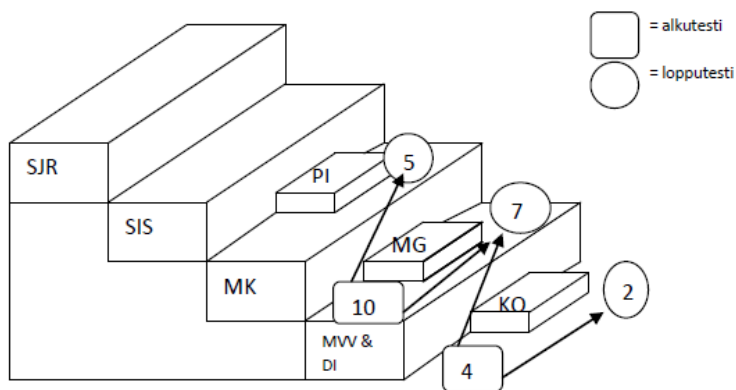
Koska tässä tutkimuksessa on suuri paino oppilaiden tekemillä oppilastöillä, kriittisiksi toiminnoiksi on valittu neljä oppimisen ja oppilaiden tulkintojen tekemisen kannalta tärkeää kohtaa. Niitä ovat kompassineulan ja magneetin välinen vuorovaikutus (KO) ja se mitä tämän vuorovaikutuksen avulla voidaan tutkia, kappaleen magnetoitumisen aikaan saamaa rakenneosien järjestäytymistä (MG), magneettien pilkkomisen vaikutusta magneetteihin (PI) sekä magnetoidun kappaleen sisäisen, järjestäytyneen rakenteen huomioimista (JÄ). Viimeisin kriittinen toiminto yhdisti kaikki edelliset yhtenäiseksi kokonaisuudeksi.

## **TULOKSET**

Kuvassa 2, 3 ja 4 on esitetty, mitä kriittisiä toimintoja opettajilla esiintyi, ja minkälaisia malleja heidän ryhmänsä oppilailla oli magnetismille alkutestissä (etureunassa olevan laatikon sisällä lukumäärä) ja minkälainen näiden oppilaiden magnetismin mallit olivat lopputestissä (takareunassa ympyrän sisällä lukumäärä). Tarkastelussa olivat ne oppilaat, jotka osallistuivat sekä alku- että lopputestiin. Nuoli kuvaa miten muutokset ovat tapahtuneet. Mallien esiintyminen esitetään mallinnuksen portaiden avulla. Kriittiset toiminnot olivat oppilaille annettuja apuportaita (kuva 1), joiden avulla oppilaiden oli helpompi saavuttaa seuraava porras eli saada malliin lisää yksityiskohtia ja magneettisia ominaisuuksia. Mallinnuksen portaiden alataso vastasi mallia, joka oli virheelinen tai tilannetta, jossa ei ollut ilmaistua mallia lainkaan ja ylin taso mallia, joka sisälsi kaikki käsitellyt mallin osat oikealla tavalla esitettynä.

### **Hilman kriittiset toiminnot**

Kuvassa 2 on esitetty, mitä kriittisiä toimintoja Hilmallä esiintyi, ja minkälaisia malleja hänen ryhmänsä oppilailla oli magnetismille alkutestissä ja lopputestissä.



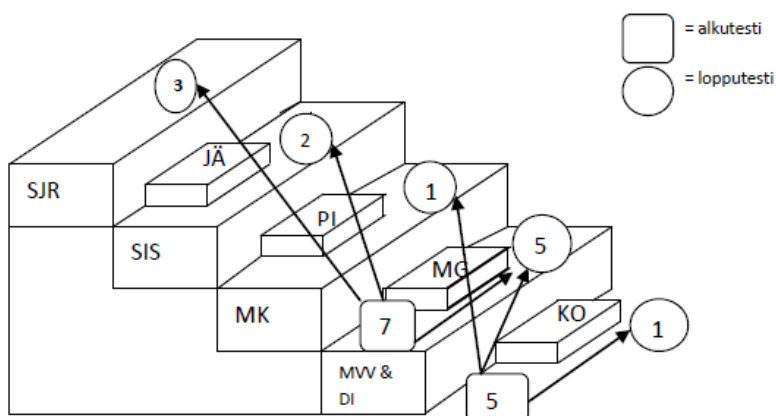
Kuva 2: Hilman ryhmän oppilaiden mallinnuksen portaat, joille on sijoitettu kriittiset toiminnot ja oppilaiden tuottamat mallit alku- ja lopputestissä.

Hilman oppilaista seitsemällä (50 %) malleissa on havaittavissa muutosta kehittyneempään. Kahdella oppilaalla ei ollut alku- eikä lopputestissä magnetismille oikeita elementtejä (NO). Oppilaiden malleista puuttuivat sisäistä rakennetta (SIS ja SJR) kuvaavat mallit. Viiden oppilaan malli pysyi DI-mallina.

Hilman opetuksessa oli havaittavissa kolme ensimmäistä kriittistä toimintoa. Viimeinen kriittinen toiminto järjestys (JÄ) puuttui. Oppilaiden malleilla ja kriittisillä toiminnoilla näyttää olevan yhteys toisiinsa.

### Annelin kriittiset toiminnot

Kuvassa 3 on esitetty, mitä kriittisiä toimintoja Annelilla esiintyi, minkälaisia malleja hänen ryhmänsä oppilailla oli magnetismille alkutestissä ja minkälainen näiden oppilaiden magnetismin malli oli lopputestissä.



Kuva 3: Annelin ryhmän oppilaiden mallinnuksen portaat, joille on sijoitettu kriittiset toiminnot ja oppilaiden tuottamat mallit alku- ja lopputestissä.

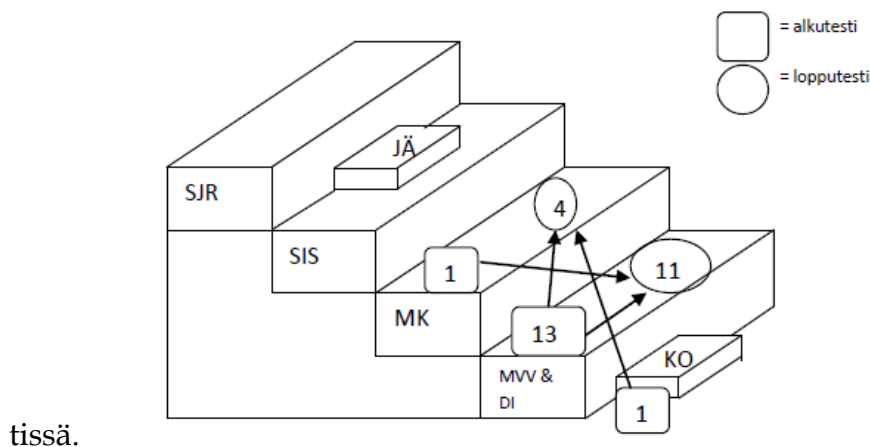
Ryhmän oppilaiden mallien kehityksessä oli havaittavissa tarkentumista. Annelin oppilaista yksi ei kyennyt tuottamaan kummallakaan kerralla magne-

tismille mallia (NO) eikä siten noussut mallinnuksen portaita. Kaksi oppilasta, joilla ei ollut tapahtunut kehittymistä, tuottivat DI - mallin. Yhteensä siis 25 % oppilaista ei kyennyt muuttamaan tuottamaansa mallia. Yksityiskohtaisimman mallin (SJR) tuotti kolme (25 %) oppilasta. Sisäistä rakennetta magnetismille osasi piirtää 42 % (5 vähintään SIS) oppilaista. Oppilailla esiintyi alkutestissä malleja kahdella tasolla ja lopputestissä malleja neljällä tasolla. Sekä alku- että lopputestin tehneistä oppilaista 75 % malli kehittyi.

Annelin opetuksessa oli kaikki kriittiset toiminnot, joiden avulla oppilaiden mallinnusta on voitu auttaa. Kriittisillä toiminnoilla ja oppilaiden tuottamilla malleilla oli yhteys toisiinsa.

### Elinan kriittiset toiminnot

Kuvassa 4 on esitetty, mitä kriittisiä toimintoja Elinalla esiintyi, ja minkälaisia malleja hänen ryhmänsä oppilailla oli magnetismille alkutestissä ja lopputes-



tissä.

*Kuva 4: Elinan ryhmän oppilaiden mallinnuksen portaat, joille on sijoitettu kriittiset toiminnot ja oppilaiden tuottamat mallit alku- ja lopputestissä.*

Elinan oppilaista kaikki kykenivät tuottamaan jonkinlaisen mallin molemmissa testeissä. Alkutestin 13 oppilaista 11 (73 %) jäi edelleen tasolle DI - malli. Korkein taso oppilaiden malleissa oli MK, jonka saavutti yksi oppilas. Hänellä oli alkutestissä NO - malli. Hänen mallinsa muutos oli Elinan ryhmän suurin. Yhden oppilaan malli taantui MK - luokasta DI - luokkaan. Kokonaisuutena ryhmän malleissa ei tapahtunut suuria muutoksia. Sekä alku- että lopputestin tehneistä Elinan oppilaista 27 % mallit kehittyivät.

Elinan opetuksessa oli niukasti kriittisiä toimintoja. Elinan opetuksessa oli havaittavissa jossakin muodossa ensimmäinen kriittinen toiminto (KO) ja viimeinen kriittinen toiminto (JÄ). Kuvassa 4 nähdään, että Elinalla oli apuporras, KO eli kriittinen toiminto kompassin käyttö. Apuporras oli kuitenkin pieni, koska oppitunneilla esiin tulevia asioita oli hyvin niukasti, ja ne esitettiin vain joillekin oppilaille. Koko luokan kanssa käytiin vain yksi kriittinen toiminto, ja se oli oppitunnilla T6 oleva JÄ toiminto.

Elinan esittämien kriittisten toimintojen ja oppilaiden tuottamien mallien kehittymisen välillä on nähtävissä yhteys.

## POHDINTAA

Kriittisten toimintojen esiintymisellä on yhteys oppilaiden tuottamien mallien kanssa. Annelin opetusryhmässä esiintyivät kaikki kriittiset toiminnot ja hänen oppilaiden mallit muuttuivat sisältörikkaimmiksi ja olivat kaikista ryhmistä monipuolisimmat ja sisältörikkaimmat. Elinan opetusryhmässä oli vain kaksi kriittistä toimintoa ja hänen oppilaidensa mallit eivät muuttunut kovin paljon. Oppilaiden mallit pysyivät lähes samanlaisina. Lisäksi esiin tulleista kriittisistä toiminnoista vain yksi oli koko luokalle kohdistettu, opetuskeskustelussa esille tullut. Hilman ryhmässä oli kolme ensimmäistä kriittistä toimintoa ja hänen oppilaidensa mallit kehittyivät, mutta eivät lopputestissä sisältäneet sisäistä rakennetta. Tämän tutkimuksen mukaan oppilaiden mallin muuttumisessa oli vaikutusta sillä, että oppilasta ohjataan tekemään oikeita havaintoja ja edelleen oikeita tulkintoja havainnoista. Siirtyminen sisältöriikkaampaan magnetismin malliin oli helpompaa, jos siirtymistä tuettiin.

Opettajan tulee ohjata oppilaita tekemään johtopäätöksiä tehtyjen havaintojen perusteella, eli selittämään ja kuvaamaan sitä, mitä ilmiö tarkoittaa, mikä saa aikaan ilmiön sekä miksi ilmiö tapahtuu. Tärkeää on myös suunnata oppilaiden huomio siihen, miten havaittu ilmiö ja siitä oleva tieteellinen malli liittyvät toisiinsa. Opettajien opetuskeskustelun toteutustavoissa oli eroja. Kuitenkaan toteutustavalla ei ollut osoitettavissa niin suurta merkitystä kuin sillä, ettei niitä ollut ollenkaan. Oppilaille oli tärkeää, että he saivat ilmasta omia mielipiteitään ja toisaalta se, että heidän toimintaansa ohjattiin. Ilman opettajan ohjausta oppilaat tekevät oppilastyöt, mutta eivät välttämättä pohdi niiden merkitystä. Verrattaessa ryhmän oppilaiden ilmaistuja malleja ja niissä tapahtuvia muutoksia sekä opettajan tarjoamia kriittisiä toimintoja toisiinsa oli näiden välillä nähtävissä selvä yhteys. Kriittisen toiminnon pois jääminen on voinut vaikuttaa siihen, ettei oppilas ole omaksunut hänelle tarjottua tietoa. Opettajan apuportaat laajentavat oppilaan ajattelun etenemistä riittävän pienissä paloissa ja ottavat huomioon oppilaan oppimiskyvyn (ZPD). Oppilaan oppiminen etenee helpommin, jos hänelle tarjotaan uutta asiaa pienemmissä erissä, oikeaan aikaan (kuvat 2,3 ja 4). Kriittiset toiminnot olivat tärkeitä oppilaan oppimista ohjaavia ja tukevia toimintoja. Tähän päätelmään voidaan tulla sillä perusteella, että Hilman ja Annelin muissa toiminnoissa ei ollut suuria eroja, mutta kriittisistä toiminnoista Hilmalta puuttui viimeisin (JÄ) ja hänen oppilaillaan puuttuivat sisältörikkaimmat mallit. Opettajan esittämän tiedon avulla oppilas kykenee laajentamaan omia käsityksiään sekä oppimaan ja ymmärtämään opiskeltavaa asiaa (vrt. Viennot ym., 2005). Uuden tiedon omaksuminen havaitaan oppilaiden mallien kehittymisenä ja niissä olevan tiedon lisääntymisenä (vrt. Greca & Moreira, 2002).

Oppilaiden pitää pystyä ilmaisemaan myös osaamattomuutensa ja tietämättömyytensä. Vaikka ongelma tuntuisi opettajasta kuinka naivilta tai yksinkertaiselta, sillä voi olla suuri merkitys oppilaalle ja hänen ajattelunsa kehittymiselle. Kannustavalla kuuntelulla ja toisten näkemyksien huomioimisella voidaan laajentaa oppilaiden ajattelua (vrt. Wertsch, 1991). Kuuntelemalla muiden käsityksiä ja vertaamalla niitä omiin käsityksiinsä oppilas muodostaa omaa mentaalimalliaan (vrt. Campoy, 2005). Oppilaiden malleista voidaan saada tietoa oppitunneilla käydyn keskustelun ja erilaisten kirjallisten tuotosten avulla. Tässä tutkimuksessa Elinan ryhmän oppilaat suorittivat kaikki annetut tehtävät, mutta he eivät saaneet ohjausta ilmaistun mallin kehittämiseen. Tehtävien järjestelmällinen suorittaminen ilman opettajan tukea ei takaa riittävää oppimista. Täten olisikin tärkeää selvittää, mitä kriittiset toiminnot ovat toisessa fysiikan asiasisällössä ja opettajien olisi syytä tiedostaa niiden merkitys opetuksen suunnittelussa.

## LÄHTEET

- Ausubel, D. P. & Robinson, F. G. 1969. School Learning. An introduction to educational psychology. Holt, Rinehart and Winston, inc.
- Barnes, D. 2008. Exploratory talk for learning. Teoksessa N. Mercer & S. Hodgkinson (toim.) *Exploring talk in school*. 1. p. Sage, 1 - 15.
- Besson, U. & Viennot, L. 2004. Using models at the mesoscopic scale in teaching physics: two experimental interventions in solid friction and fluid statics. *International Journal of Science Education*, 26 (9), 1083 – 1110.
- Borges, A. T. 1997. Models of magnetism. Teoksessa *Explaining Models and Modelling in Science and Technology Education*. Contributions from the MISTRE Group. Faculty of Education and Community Studies. The University of Reading, 280 – 297.
- Campoy, R. 2005. Case study analysis in the classroom. Becoming a reflective teacher. United State of America: Sage.
- Corpuz, E. D. & Rebello, N. S. 2011. Investigating students' mental models and knowledge construction of microscopic friction. I. Implications for curriculum design and development. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 7, 020102, 1 – 9.
- Gilbert, J. K., Boulter, C. J. & Rutherford, M. 2000. Explanations with models in science education. Teoksessa J. K. Gilbert & C. J. Boulter (toim.) *Developing models in science education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 193 – 208.
- Greca, I. M. & Moreira, M. A. 2001. Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. *Science Education*, 86, 106 – 121.
- Guimarães, A. P. 2005. From lodestone to supermagnets. Understanding Magnetic Phenomena. WILEY-VCH Verlag GmGH & Co. KGaA, Weinheim.

- Guisalo, J., Almudí, J. & Zubimendi, J. 2004. Difficulties in learning the introductory magnetic field theory in the first years of university. *Science Education*, 88, 443 – 464.
- Harmoinen, S. 2006. Lukion opiskelijoiden käsityksiä magnetismista. Teoksessa T. Asunta ja J. Viiri (toim.) *Polkuja tutkimukselliseen opettamiseen ja oppimiseen matemaattisissa aineissa*. Julkaisu Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäiviltä Jyväskylässä 21. – 22.10.2005. Jyväskylän yliopiston opettajankoulutuslaitos 2006 tutkimuksia 84. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino, 201-210.
- Harmoinen, S. (2013). Opettajan ohjauksen ja vuorovaikutuksen antaman tuen merkitys oppilaan rakentaessa mallia magnetismista. Väitöstutkimus. Jyväskylän yliopisto: Jyväskylän yliopiston kasvatustieteiden, psykologian ja sosiaalitieteiden tutkimusjulkaisu 476.
- Myhill, D. & Warren, P. 2005. Scaffolds or straitjackets? Critical moments in classroom discourse. *Educational Review*, 57 (1), 55 – 69.
- Powell, A. B, Francisco, J. M. & Maher, C. A. 2003. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 405 – 435.
- Ruddock, J. & Flutter, J. 2008. Pupils participation and pupil perspective. Teoksessa N. Norris (toim.) *Curriculum and teaching 35 years of the Cambridge Journal of Education*. Oxon: Routledge, 181 – 197.
- Viennot, L., Chauvet, F., Colin, P. & Rebmann, G. 2005. Designing strategies and tools for teacher training: the role of critical details, examples in optics. *Science Education*, 89, 13 – 27.
- Wertsch, J. V. 1991. *Voices of the mind, A sociocultural approach to mediated action*. Hertfordshire, USA: Hatvester Wheatsheaf.





## MILLAISIA MATEMATIIKAN OPETUSTAPOJA LUOKAN- JA AINEENOPETTAJAOPISKELIJAT PITÄVÄT TEHOKKAINA?

Markus Hähkiöniemi, Mira Laitila & Paula Penttinen

Jyväskylän yliopisto

*Tässä tutkimuksessa vertaillaan luokanopettaja- ja matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden käsityksiä matematiikan opettamisesta. Aineisto kerättiin kyselylomakkeella, jossa oli kuvattu kolme matematiikan opetustapaa. Vastaajia pyydettiin valitsemaan tehokkaimpina pitämänsä ja mieluiten käyttämänsä opetustapa sekä perustelemaan valintansa. Kyselyyn vastasi 68 luokanopettajaopiskelijaa ja 54 matematiikan aineenopettajaopiskelijaa. Suurin osa vastaajista piti oppilaslähtöistä tutkivaa oppimista tehokkaimpana opetustapana. Vähiten kannatusta sai opettajajohtoinen suora opetus. Luokan- ja aineenopettajaopiskelijoiden jakaumat eivät eronneet tilastollisesti merkitsevästi. Vastanneista viidennes käyttäisi mieluiten jotain muuta opetustapaa kuin tehokkaimpana pitämäänsä opetustapaa. Usein tätä perusteltiin ajankäytöllisillä syillä tai tehokkaan tavan haasteellisuudella.*

### JOHDANTO

Useimmiten nykyään matematiikan opetuksessa suositellaan käytettävän oppilaita aktivoivia opetusmenetelmiä (esim. POPS, 2014). On myös tutkimuksellista näyttöä tällaisten oppilaslähtöisten, tutkivaa oppimista hyödyntävien opetustapojen tehokkuudesta verrattuna suoraan opetukseen, jossa opettaja luennoimalla tai mallintamalla eksplisiittisesti opettaa uuden asian (Alfieri, Brooks, Aldrich, & Tenenbaum, 2011). Kuitenkin matematiikan opetus edelleen usein tapahtuu suoran opetuksen muodossa (Savola 2008; Jacobs, Hiebert, Givvin, Hollingsworth, Garnier, & Wearne, 2006). Yhtenä selittävänä tekijänä ovat opettajien uskomukset siitä, millaista matematiikan opetuksen tulisi olla. Uskomusten nähdään olevan yhteydessä opettajan toimintaan (Philipp, 2007). Suhde ei kuitenkaan ole yksinkertainen. Opettajan toiminta voi myös olla ristiriidassa hänen uskomustensa kanssa (Raymond, 1997; Simmons ym., 1999) eikä ei ole varmuutta siitä johtaako muutos uskomuksissa muutokseen käytänteissä vai toisinpäin (Philipp, 2007). Lisäksi ulkoiset tekijät kuten sosiaalinen paine voivat aiheuttavat lokaaleja muutoksia opettajan uskomuksissa/toiminnassa (Herbel-Eisenmann, Lubinski, & Id-Deen, 2006).

Erilaisista matematiikan opetustavoista ja niitä vastaavista uskomuksista on kirjallisuudessa esitetty useita luokitteluja, joissa on monia yhtymäkohtia. Kuhs ja Ball (1986) esittivät luokittelun, jota useat tutkijat ovat tämän jälkeen käyttäneet ja muokanneet edelleen (esim. Son & Crespo, 2009; Van Zoest, Jones, &

Thornton, 1994; Beswick, 2005). Kuhsin ja Ballin mukaan neljä näkökulmaa matematiikan opetukseen ovat (1) Oppilaskeskeinen (oppija konstruoi aktiivisesti tietoa ja opetuksen lähtökohtana oppilaiden ideat), (2) Sisältökeskeinen ymmärtämistä painottava (opetuksen lähtökohtana sisällöt, mutta painotus käsitteellisessä ymmärtämisessä), (3) Sisältökeskeinen suorittamista painottava (proseduurien suorittaminen) ja (4) Luokanhallintakeskeinen (opetuksen järjestäminen pintatasolla). Kolme ensimmäistä näkemystä matematiikan opetuksesta rinnastuvat Ernestin (1989) esittämään kolmeen näkemykseen matematiikasta: ongelmanratkaisunäkemys (tutkimusprosessi), platoninen näkemys (staattinen yhtenäinen systeemi) ja instrumentaalinen näkemys (sääntöjä ja faktoja). Myös Ernestin jaottelua on hyödynnetty useissa tutkimuksissa (esim. Viholainen, Asikainen & Hirvonen, 2012). Myös Dionne (1984) on esittänyt vastaavan jaottelun konstruktivistiseen, formalistiseen ja traditionaaliseen näkemykseen matematiikasta (ks. Oksanen & Hannula, 2013).

Oksanen ja Hannula (2013) tutkivat suomalaisten matematiikan opettajien näkemyksiä Dionnen jaottelun pohjalta. He havaitsivat, että suomalaiset opettajat kannattivat eniten konstruktivistista näkemystä. Viholainen ym. (2012) puolestaan tutkivat aineen- ja luokanopettajaopiskelijoiden näkemyksiä samankaltaisella jaottelulla. He havaitsivat eri näkemysten olevan tasaisesti edustettuja.

Kaasila ja Pehkonen (2009) tutkivat luokanopettajaopiskelijoiden näkemyksiä tehokkaasta matematiikan opetuksesta. He löysivät seitsemän tyypillistä piirrettä: tavoiteorientoituneisuus, oppilaiden ajattelun kuunteleminen ja ymmärtäminen, joustavuus, monien opetusmenetelmien hyödyntäminen, ongelma-keskeisyys, yhteydet jokapäiväiseen elämään ja arviointi. Kaasilan ja Pehkosen (2009) mukaan se, millaista opetusta pidetään tehokkaana, riippuu oppimistavoitteista. Tietyntyyppisen opetuksen pitäminen oppimisen kannalta tehokkaana kertoo siis myös siitä, minkä ajatellaan olevan oppimisen tavoite.

Aikaisempien tutkimusten valossa suomalaisten opettajien näkemyksissä tuntuu painottuvan oppilaslähtöisyys. Uskomuksia tutkittaessa on kuitenkin syytä huomioda, että opettajien itse ilmaisemat uskomukset saattavat erota toiminnassa ilmenevistä uskomuksista. Tutkimuksissa on esimerkiksi havaittu, että itse ilmaistut uskomukset voivat olla oppilaskeskeisiä, mutta opetus opettaja-johtoista (Simmons ym., 1999).

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden ja luokanopettajaopiskelijoiden näkemyksiä erilaisista tavoista opettaa matematiikkaa. Tutkimusta ohjaavat tutkimuskysymykset ovat: 1. Mitä opetustapaa aineen- ja luokanopettajaopiskelijat pitävät tehokkaimpana? 2. Miksi opettajaopiskelijat käyttäisivät mieluummin jotain muuta kuin tehokkaimpana pitämäänsä opetustapaa?

## MENETELMÄT

### Aineiston keruu

Tutkimuksen aineisto kerättiin kyselylomakkeella vuosina 2010–2012. Kyselyyn vastasi yhteensä 68 luokanopettajaopiskelijaa ja 54 matematiikan aineenopettajaopiskelijaa. Luokanopettajaopiskelijat olivat perusopetuksessa opetettavien aineiden ja aihekokonaisuuksien monialaisten opintojen alkuvaiheessa ja aineenopettajaopiskelijat pedagogisten aineopintojen alkuvaiheessa. Opiskelijoiden välillä voi olla suuriakin eroja, mutta usein monialaiset opinnot suoritetaan toisena opiskeluvuotena. Aineenopettajan pedagogiset aineopinnot puolestaan suoritetaan, kun matematiikan pääaineopintoja on suoritettu vähintään 50 opintopistettä eli usein neljäntenä opiskeluvuotena.

Kyselylomakkeessa kuvattiin kolme opetustapaa. Vastaajia pyydettiin valitsemaan mitä opetustapaa he pitävät tehokkaimpana oppimisen kannalta sekä perustelemaan vastauksensa vapaamuotoisesti. Tehokkuutta ei kyselyssä määriteltä tarkemmin kuin tehokkuutena oppimisen kannalta. Vaikka vastaajat voivat ymmärtää tehokkuuden eri tavoin on se todennäköisesti yhteydessä heidän käsitykseensä oppimisen tavoitteesta. Tämän jälkeen kysyttiin, mitä opetustapaa he itse käyttäisivät mieluiten. Tähänkin pyydettiin perustelu mikäli valinta erosi aiemmasta valinnasta. Lisäksi kysyttiin muiden muassa mikä opetustavoista kuvaa parhaiten vastaajan saamaa matematiikan opetusta. Lomakkeessa olleiden opetustapojen kuvaukset on esitetty alla.

*Opetustapa A:* Opettaja Ahonen aloittaa yleensä uuden aiheen käsittelyn esittämällä taustalla olevan matematiikan teorian kuten jonkin teoreeman ja sen todistuksen tai perustelun. Ahonen johdattaa oppilaat tähän teoriaan esittämällä kysymyksiä, joihin oppilaat saattavat vastata nopeasti. Teorian käsittelyn jälkeen Ahonen esittää esimerkkitehtäviä, joissa sovelletaan kyseistä teoriaa. Myös esimerkkien käsittelyn yhteydessä Ahonen kyselee oppilailta esimerkiksi mikä on seuraava vaihe ratkaisussa. Esimerkkien käsittelyn jälkeen oppilaat harjoittelevat ratkaisemaan itsenäisesti vastaavanlaisia tehtäviä. Ahonen kiertelee luokassa, neuvoa oppilaita oikean ratkaisutavan toteuttamisessa ja tarkastaa, että he ratkaisevat tehtävät oikein.

*Opetustapa B:* Opettaja Lepistö aloittaa yleensä uuden aiheen käsittelyn esittämällä oppilaille matemaattisen tilanteen, jonka selvittämiseen tarvitaan uusia käsitteitä ja/tai teoreemoja. Lepistö johdattelee kyselemällä oppilaat huomioimaan uuden matemaattisen teorian muodostamisen tarpeen. Tämän jälkeen Lepistö määrittelee tarvittavat käsitteet sekä muotoilee ja todistaa tarvittavan teoreeman. Lopuksi Lepistö näyttää miten alussa esitetty tilanne voidaan selvittää uuden teorian avulla. Tämän jälkeen Lepistö antaa oppilaille tehtäviä, jotka ratkaistaan tunnilla tai kotitehtävinä.

*Opetustapa C:* Opettaja Mäkelä aloittaa yleensä uuden aiheen käsittelyn antamalla oppilaille tehtävän (tai tehtäviä) tästä aiheesta. Oppilaat yrittävät itsenäisesti tai pienissä ryhmissä keksiä, miten tehtävän voisi ratkaista. Mäkelä kiertee luokassa kuunnellen millaisia ratkaisuideoita ja ongelmia oppilailla on tehtävän ratkaisemisessa. Mäkelä varoo itse kertomasta, miten tehtävä ratkaistaan eikä kommentoi ovatko oppilaiden ratkaisuideat oikeita. Kun oppilaat ovat tarpeeksi miettineet tehtävää, Mäkelä pyytää joitakin oppilaita esittämään ratkaisuideoita ja kohtaamiaan ongelmia. Mäkelän johdolla oppilaat pohtivat, mitä etuja ja haittoja sekä mitä yhteistä ja erilaista kehitetyissä ratkaisuideoissa on. Tämän jälkeen Mäkelä kokoaa yhteen, mitä erilaisista ratkaisuideoista voidaan oppia ja johtaa niistä taustalla olevan matematiikan teorian kuten jonkin teoreeman.

*Opetustapa A* laadittiin vastaamaan opettajajohtoista suoraa opetusta, jossa painottuu proseduurien ja faktojen opetus. *Opetustapa B* on sisältöpainotteinen, mutta korostaa matematiikkaa järjestelmänä. Myös tässä opetustavassa opettaja johtaa tarkasti aiheen käsittelyä vaikka esittääkin kysymyksiä oppilaille. *Opetustapa C* vastaa oppilaslähtöistä, ongelmanratkaisua painottavaa tutkivaa matematiikan opetusta (ks. Hähkiöniemi, 2013). Opetustapojen kuvaukset perustuvat tutkijoiden näkemykseen em. kolmesta opetustavasta.

### **Aineiston analyysi**

Analyysi alkoi vertaamalla luokan ja aineenopettajien vastauksia  $\chi^2$ -riippumattomuustestin avulla. Tämän analyysin ulkopuolelle jätettiin 5 opiskelijaa, jotka eivät vastanneet kysymykseen. Tämän jälkeen etsittiin aineistosta ne opiskelijat, jotka olivat vastanneet käyttävänsä mieluiten jotain muuta kuin tehokkaimpana pitämäänsä opetustapaa. Näiden 24 opiskelijan perustelut muun kuin tehokkaimman opetustavan käyttämiseen mieluiten luokiteltiin aineistolähtöisesti. Kahden opiskelijan perustelut sisälsivät elementtejä kahdesta eri luokasta ja luokiteltiin siksi kahteen luokkaan. Yksi opiskelija ei kirjoittanut perustelua ja yksi suljettiin analyysin ulkopuolelle epäselvien vastausten vuoksi.

### **TULOKSET**

#### **Tehokkaimpana pidetty opetustapa**

Taulukossa 1 on esitetty opiskelijoiden tehokkaimmaksi valitsevat opetustavat. Luokanopettajaopiskelijoiden ja matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden näkemyksessä tehokkaimmasta matematiikan opettamistavasta ei ole tilastollisesti merkitsevää eroa,  $\chi^2(2, N=116) = 4,072, p = 0,131$ .

*Taulukko 1: Aineen- ja luokanopettajaopiskelijoiden tehokkaimpana pitämät opetustavat.*

|                           |   | Opetustapa A | Opetustapa B | Opetustapa C |
|---------------------------|---|--------------|--------------|--------------|
| Aineenopettajaopiskelijat | f | 10           | 15           | 25           |
|                           | % | 20,0         | 30,0         | 50,0         |
| Luokanopettajaopiskelijat | f | 9            | 32           | 25           |
|                           | % | 13,6         | 48,5         | 37,9         |

Kummassakin opiskelijaryhmässä opettajajohtoinen suora opetus (opetustapa A) sai vähiten kannatusta. Tässä otoksessa suurempi osuus aineen- kuin luokanopettajaopiskelijoista valitsi oppilaslähtöisen opetustavan C tehokkaimaksi. Kuten todettu, tätä ei voida kuitenkaan yleistää.

Taustatietona opiskelijoiden näkemyksille, opiskelijoilta kysyttiin heidän itse saamaansa matematiikan opetusta. Opiskelijoiden omat koulukokemukset painottuvat opettajajohtoiseen suoraan opetustapaan (Taulukko 2), mikä eroaa selvästi heidän näkemyksestään tehokkaimmasta opetustavasta.

*Taulukko 2: Aineen- ja luokanopettajaopiskelijoiden näkemys opetustavasta, joka parhaiten kuvaa heidän saamaansa matematiikan opetusta.*

|                           |   | Opetustapa A | Opetustapa B | Opetustapa C |
|---------------------------|---|--------------|--------------|--------------|
| Aineenopettajaopiskelijat | f | 48           | 5            | –            |
|                           | % | 90,56        | 9,43         |              |
| Luokanopettajaopiskelijat | f | 58           | 6            | –            |
|                           | % | 90,63        | 9,38         |              |

### **Tehokkaimpana pidetyn ja mieluiten käytetyn opetustavan suhde**

Kaikista vastanneista opiskelijoista 24, eli 20 % kertoi käyttävänsä opetuksessaan mieluiten jotain muuta kuin tehokkaimpana pitämäänsä opetustapaa. Taulukossa 3 on esitetty näiden opiskelijoiden valinnat. Useat opiskelijat pitivät oppilaslähtöistä opetustapaa C tehokkaimpana, mutta käyttäisivät kuitenkin mieluiten opetustapaa A tai B. Osa opiskelijoista piti opetustapaa B tehokkaimpana, mutta käyttäisi mieluiten muuta opetustapaa.

*Taulukko 3: Aineen- (aiko) ja luokanopettajaopiskelijat (luoko), jotka käyttäisivät mieluummin muuta kuin tehokkaimpana pitämäänsä opetustapaa.*

|                                 |   | Mieluiten käyttämä opetustapa |       |        |       |        |       |
|---------------------------------|---|-------------------------------|-------|--------|-------|--------|-------|
|                                 |   | Tapa A                        |       | Tapa B |       | Tapa C |       |
|                                 |   | Aiko                          | Luoko | Aiko   | Luoko | Aiko   | Luoko |
| Tehokkaimpana pitämä opetustapa | A |                               |       |        |       |        |       |
|                                 | B | 2                             | 2     |        |       | 3      | 2     |
|                                 | C | 4                             | 3     | 8      |       |        |       |

Opiskelijoiden perusteluista muun kuin tehokkaimpana pitämänsä opetustavan käyttämiseen mieluiten muodostettiin kuusi luokkaa (Taulukko 4).

*Taulukko 4: Aineen- (aiko) ja luokanopettajaopiskelijoiden (luoko) perustelut muun kuin tehokkaimpina pitämänsä opetustavan käyttämiselle mieluiten.*

|                                                                                                                     | Aiko | Luoko |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|
| Opetustapaa A käytettäisiin mieluummin kuin tehokkainta tapaa, koska A sopii itselle tai on tutuin                  | 1    | 3     |
| Käytettäisiin mieluiten jotain muuta opetustapaa, koska tehokkain tapa on haasteellinen tai vaikea (useimmiten C-A) | 6    | 3     |
| Tehokkaimman opetustavan C sijasta käytettäisiin muuta tapaa ajankäytöllisistä syistä                               | 7    |       |
| Opetustapaa B käytettäisiin, koska se on tavan A ja C välimaastossa                                                 | 1    |       |
| Mieluiten käytettäisiin tapaa C, mutta ajankäytöllisistä syistä tehokkaimpina opetustapana pidetään tapaa B         | 3    |       |
| Opetustapa B on tehokkain heikoille, mutta tapa C olisi mieluisin luovuuden vuoksi                                  |      | 1     |
| Ei perustelua                                                                                                       |      | 1     |

Yksi aineen- ja kolme luokanopettajaopiskelijaa luokiteltiin luokkaan (1) *Opetustapaa A käytettäisiin mieluummin kuin tehokkainta tapaa, koska A sopii itselle tai on tutuin*. Aineenopettajaopiskelija perusteli vastaustaan seuraavasti: "Tapa ei ole paras mutta itselle kaikkein tutuin ja tästä syystä käyttäisin sitä. Tosin myös B tapa houkuttelee paremmuutensa vuoksi". Eräs luokanopettajaopiskelija puolestaan totesi, että "Johtuu ainoastaan vain siitä että kyseinen tapa on minulle tutuin. Itseäni on opetettu kyseisellä tavalla aina".

Kuusi aineen- ja kolme luokanopettajaopiskelijaa luokiteltiin luokkaan (2) *Käytettäisiin mieluiten jotain muuta opetustapaa, koska tehokkain tapa on haasteellinen tai vaikea*. Useimmiten tämän luokan opiskelijat pitivät oppilaslähtöistä opetustapaa C tehokkaimpina, mutta käyttäisivät mieluiten opettajajohtoista suoraa opetusta. Eräs aineenopettajaopiskelija perusteli tätä seuraavasti:

"C-vaihtoehto on haastava toteuttaa, sillä opettajan on tunnettava ryhmä todella hyvin ja hänen on huolehdittava, että jokainen oppilas osallistuu. A-kohdassa oppilaan omalle ajattelulle ei jää niin paljon tilaa, mutta toisaalta toiset oppivat vasta itse laskiessa."

Useat muutkin opiskelijat mainitsivat perusteluissaan ryhmän tuntemisen. Eräs luokanopettajaopiskelija perusteli tämän lisäksi valintojaan aineenhallinnalla:

"Minulla on niin vähän kokemusta ja heikko aineenhallinta, että lähtisin mielellään liikkeelle teoriasta. Lisäksi en vielä osaisi reagoida oppilaiden eri tavalla (vaikka oikein) saatuihin vastauksiin"

Useassa muussakin perustelussa viitattiin siihen, että opiskelijat eivät vielä koe kykenevänsä muuhun kuin opettajajohtoiseen suoraan opetukseen, mutta kokemuksen myötä asia saattaa muuttua.

Seitsemän aineenopettajaopiskelijaa luokiteltiin luokkaan (3) *Tehokkaimman opetustavan C sijasta käytetään muuta tapaa ajankäytöllisistä syistä*. Luokanopettajaopiskelijat eivät viitanneet ajankäytöllisiin syihin. Eräs opiskelija selitti miksi käyttäisi opetustavan C sijaan tapaa B seuraavasti:

”Aika kouluissa on valitettavan rajoitettu ja luulen, että opetustapa C:n menisi niin paljon aikaa, että laskuharjoitteluun sitä ei jäisi lainkaan. Vaikka oppiminen C:n tavoin olisikin tehokkainta, on mielestäni laskuharjoittelu äärimmäisen tärkeää.”

Useimmiten tämän luokan vastauksissa ilmaistiinkin käytettävän juuri opetustapaa B tavan C lisäksi. Ilmeisesti ajankäyttö ei kuitenkaan ollut tärkein kriteeri, koska tapa A olisi vielä nopeampi kuin tapa B. Ehkä tapa B koettiin jonkinlaiseksi kompromissiksi. Kuten eräs opiskelija totesi ”se on suhteellisen hyvä oppimisen kannalta mutta myös nopea”.

Yksi aineenopettajaopiskelija mainitsi suoraan opetustavan B olevan kompromissi. Hänet luokiteltiin luokkaan (4) *Opetustapaa B käytetään, koska se on tavan A ja C välimaastossa*. Hänen perustelunsa oli seuraava:

”Tällä hetkellä opetustapa B tuntuisi itselleni mieluisimmalta opetustavalta, sillä se on A:n ja C:n välimaastossa. Tässä tavassa oppilaat saavat pohtia asioita, mutta kaikki ei kuitenkaan perustu vain heidän omiin pohdintoihinsa”

Kolme aineenopettajaopiskelijaa luokiteltiin luokkaan (5) *Mieluiten käytettäisiin tapaa C, mutta ajankäytöllisistä syistä tehokkaimpana opetustapana pidetään tapaa B*. Nämäkin opiskelijat perustelivat oppilaslähtöisen opetustavan C vievän enemmän aikaan. Heidän mukaansa opetustapa B on siksi tehokkaampi vaikka he käyttäisivätkin opetustapaa C mieluiten. Eräässä perustelussa todettiin seuraavaa:

”Oppilaiden oma osallisuus asioiden ymmärtämiseen ja käsittelyyn on tärkeää, mutta valitettavasti luulen kyseisen tavan vievän liikaa aikaa ainakin nykyisessä tuntikehyksessä (siksi vastasin B:n edelliseen kohtaan...)”

Tämän luokan opiskelijoiden perustelut olivat lähellä luokan 3 perusteluja vaikka heidän valintansa mieluisimmalle ja tehokkaimmalle opetustavalle olivatkin päinvastaiset. Siten näissä luokissa yhteensä 10 aineenopettajaopiskelijaa vetosi ajankäytöllisiin syihin.

Yksi luokanopettajaopiskelija luokiteltiin luokkaan (6) *Opetustapa B on tehokkain heikoille, mutta tapa C olisi mieluisin luovuuden vuoksi*. Hänen perustelunsa oli:

”Hyvätkään laskijat eivät kyllästy ja oppilaat saavat tunteen mahdollisuudesta vaikuttaa. Tämä on myös mahdollistaa matemaattisen luovuuden, eikä kaikki ole valmiina annettua.”

Lisäksi opetustavan B tehokkuuden perusteluissa hän totesi, että ”matematiikassa heikommatkin saavat mahdollisuuden oppia ja ymmärtää”. Siten myös

luokan heterogeenisuus saattaa vaikuttaa siihen, miksi tehokkain ja mieluisin opetustapa eroavat.

## **POHDINTA**

Pieni osa (16 %) opiskelijoista piti opettajajohtoista suoraa opetusta tehokkaimpana opetustapana. Sen sijaan kohtuullisen suuri osa (43 %) opiskelijoista piti oppilaslähtöistä, ongelmanratkaisua ja tutkivaa oppimista painottavaa opetustapaa tehokkaimpana. Näin ollen suomalaiset opettajiksi opiskelevat ovat ainakin lähtökohtaisesti avoimia oppilaslähtöisille opetustavoille eivätkä suhtaudu kritiikittömästi opettajajohtoiseen suoraan opetukseen. Muissakin tutkimuksissa on viitteitä opettajien positiivisesta suhtautumisesta oppilaslähtöisyyteen (Kaasila & Pehkonen, 2009; Oksanen & Hannula, 2013). Tuloksia tulkittaessa on huomioitava, että opettajien itse ilmaisemat uskomukset voivat olla oppilaslähtöisiä vaikka opetus on opettajajohtoista (Simmons ym., 1999).

Viidennessä vastaajista opettaisi mieluiten muulla kuin tehokkaimpana pitämällä tavalla. Useissa tapauksissa tämä tarkoitti sitä, että oppilaslähtöisen opetustavan edut tiedostetaan, mutta silti käytettäisiin jotain muuta tapaa. Siten jo opintojen aikana tulevilla opettajilla on monia syitä, miksi he eivät käyttäisi teoriassa hyvänä pitämiään menetelmiä. Tässä tutkimuksessa syiksi mainittiin omat koulukokemukset, ajankäytölliset syyt sekä tehokkaan opetustavan haasteellisuus. Opettajien omat koulukokemukset painottuvan tulosten mukaan opettajajohtoiseen suoraan opetukseen. Tämä on myös ilmeisesti vallitseva opetustapa Suomen kouluissa (ks. Savola, 2008). Tämä on ongelmallista, sillä noviisiopettajat saattavat hylätä oppimansa nykyaikaiset menetelmät ja jatkaa vallitsevan opetuskulttuurin mukaista opetusta (Hill, 2000; Raymond, 1997).

Ajankäytöllisiä syitä mainitsivat ainoastaan aineenopettajat. Alakoulussa aikaa onkin enemmän asioiden käsittelyyn. Myös muissa tutkimuksissa on tehty havaintoja opettajien kokemasta ajankäytön paineesta (esim. Hähkiöniemi, 2013). Aiemmissä tutkimuksissa on myös havaittu ajankäytöllisten syiden vaikuttavan opettajan toimintaan. Raymondin (1997) tutkimuksessa ulkoisten tekijöiden kuten aikarajoitteiden havaittiin vaikuttavan siihen, miksi opettajan uskomukset ja toiminta ovat ristiriidassa. Oppilaslähtöisyys koetaan haastavaksi. Oppilaslähtöinen opetustapa myös on haastava. Opettajat tarvitsevatkin rohkeutta tehdä vaikeita asioita ja toteuttaa oppilaslähtöisyyttä. On huolestuttavaa, että opiskelijat ilmaisivat uransa alkuvaiheessa käyttävänsä mieluiten helpompia opetustapoja. Maassa, jossa täydennyskoulutus on harvinaista, tämä voi johtaa siihen, että kun rutiinit rakentuvat alkuvuosina, ovat opitut vaihtoehtoiset opetusmenetelmät unohtuneet tai niiden työstäminen tuntuu entistä vaikeammalta. Siten tulisi kehittää tapoja tukea opettajia uransa alkuvaiheessa sekä myös sen jälkeen.



## LÄHTEET

- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal Of Educational Psychology*, 103(1), 1-18.
- Beswick, K. (2005). The beliefs/practice connection in broadly defined contexts. *Mathematics Education Research Journal*, 17(2), 39-68.
- Dionne, J. (1984). The perception of mathematics among elementary school teachers. Teoksessa J. Moser (toim.), *Proceedings of the 6th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (s. 223-228). Madison (WI), USA: University of Wisconsin.
- Ernest, P. (1989). The impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. <http://people.exeter.ac.uk/PErnest/impact.htm>. Luettu 15.4.2015
- Herbel-Eisenmann, B. A., Lubienski, S. T., & Id-Deen L. (2006). Reconsidering the study of mathematics instructional practices: The importance of curricular context in understanding local and global teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 313-345.
- Hill, L. (2000). Theory practice and reflection: a pre-service primary mathematics education programme. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 6(1), 23-39.
- Hähkiöniemi, M. (2013). Teacher's reflections on experimenting with technology-enriched inquiry-based mathematics teaching with a preplanned teaching unit. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 295-308.
- Jacobs, J. K., Hiebert, J., Givvin, K. B., Hollingsworth, H. G., Garnier, H., & Wearne, D. (2006). Does eight-grade mathematics teaching in the United States align with the NCTM standards? Results from TIMSS 1995 and 1999 video studies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(1), 5-32.
- Kaasila, R. & Pehkonen, E. (2009). Effective mathematics teaching in Finland through the eyes of elementary student teachers. Teoksessa J. Cai, G. Kraisner, B. Perry & N. Wong (toim.), *Effective mathematics teaching from teachers' perspective. National and cross-national studies* (s. 203-216). Rotterdam, Alankomaat: Sense.
- Kush T.M. & Ball D.L. 1986. Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions. National Center of Research on Teacher Education. Michigan State University.
- Oksanen, S. & Hannula, M. S. (2013). Changes in Finnish mathematics teachers' beliefs during 1987-2012. Teoksessa A. M. Lindemaier & A. Heinze (toim.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, s. 417-424). Kiel, Saksa: PME.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affects. Teoksessa F. Lester (toim.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 257-315). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- POPS (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus.
- Raymond, A. M. (1997). Inconsistency between a beginning elementary school teacher's mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 550–576.
- Savola, L. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland*. Julkaisematon väitöskirja. The Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University.
- Simmons, P. E., ym. (1999). Beginning teachers: beliefs and classroom actions. *Journal of Research in Science Teaching*, 36(8), 930-954.
- Son, J.-W. & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 235-26.
- Van Zoest, L. R., Jones, G. A., & Thornton, C. A. (1994). Beliefs about mathematics teaching held by pre-service teachers involved in a first grade mentorship program. *Mathematics Education Research Journal*, 6(1), 37-55.
- Viholainen, A., Asikainen M. & Hirvonen P.E. (2012). Aloittavien matematiikan pää- ja sivuaineopiskelijoiden uskomuksia matematiikasta. Teoksessa H. Krzywacki, K. Juuti, & J. Lampiselkä (toim.), *Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen ajankohtaista tutkimusta* (s. 129-144). Helsinki: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura.

## THE NATURE OF TEACHER DISCOURSE DURING PRACTICAL WORK IN LOWER SECONDARY PHYSICS EDUCATION

Kaisa Jokiranta, Sami Lehesvuori & Jouni Viiri

University of Jyväskylä

*We studied teachers' discourse during practical work in lower secondary schools in Finland. Eight videotaped physics lessons on the topics of electrical power, energy and the cost of electricity were analysed. The teacher discourse was categorised as either belonging to the domain of ideas I, the domain of objects and observables O or making links between these two domains I/O. Also an analysis of the nature of classroom interaction was included to provide the framework for the discourse. The key findings were that a vast majority of teacher discourse during practical work was in the domain O with some in I/O. The results imply that teachers should pay more attention to their discourse during practical work and more actively make links to the theoretical knowledge behind the phenomena.*

### INTRODUCTION

This study is about teacher discourse during practical work in lower secondary schools in Finland. Researchers do not have a common definition of 'practical work', but a suitable definition is given by Millar (2004, p. 2):

... I am using the term 'practical work' to refer to any teaching and learning activity which at some point involves the students in observing or manipulating the objects and materials they are studying.

Practical work is one of the main elements in physics teaching and has many purposes, such as to make phenomena more real for students, to arouse and maintain students' interest and to teach students to find facts and arrive at new principles. However, this work will focus on practical work's potential as a tool of enhancing students' content knowledge of physics. Unfortunately according to previous research, although teachers expect students to learn cognitive skills and theoretical knowledge through practical work, this generally does not happen (Abrahams, 2011; Millar *et al.*, 1999).

It was recently discovered in an international research project on physics education that "[practical] activities were only rarely connected to physics concepts, they objectives were rather low in cognitive demand and they were strongly guided by the teacher" (Börlin & Labudde, 2014, p. 211). Furthermore, Millar and Abrahams (2009) found that a vast majority of classroom time and discourse during practical work was used to "successfully 'producing the phenomenon'" and enabling the students to "make the intended observations" (p. 59, 62). Un-

fortunately it has been found in several studies that observations alone do not lead to the ideas and explanations (Millar, 2004; Tiberghien, 1999).

The applicability of these sorts of discovery-based views of learning in science teaching and inquiry as a teaching method of content knowledge has been widely challenged. For instance Osborne (2014) argues that science educators should distinguish between teaching the content knowledge of science through inquiry and illuminating the nature of science using inquiry. Elaborating on the same subject Chinn and Malhotra (2003) suggest that using excessively simplified inquiry tasks, which are typical in schools, might give the students a faulty image of science as “simple, certain, algorithmic, and focused at a surface level of observation” (p. 190) with a clear goal and a ‘correct’ outcome.

Socio-cultural theories of learning emphasize the teachers’ role in guiding students to internalise existing theories. The teacher has to act as an active agent in facilitating the process of constructing knowledge (Driver *et al.*, 1994; Hodson, 2014) and making links between the students’ ideas and observations (Scott, Mortimer & Ametller, 2011). Consequently, we included the discussion phase of an experimental activity as a part of practical work.

Millar *et al.* (1999, p. 35) state, that

the core purpose of practical activity in science teaching is to help the student make links between the domain of objects and observable things, and the domain of ideas.

This categorization of discourse and knowledge represents the interplay between the observations of the tangible world and the abstract ideas and principles of physics. The domain of objects and observables (*O*) is comprised of “objects and properties that can all be directly measured or observed”, whereas the domain of ideas (*I*) consists of “ideas, none of which can be directly observed or measured” (Abrahams, 2011, p. 77).

Abrahams and Millar (2008) suggest that the outcomes of practical work could be significantly improved should teachers and the authors of teaching materials recognise the importance of discussion between the domain *O* and the domain *I*: the students ought to be committed to the activities with their minds as well as their hands. This topic is yet to be thoroughly studied in Finnish schools. As the Finnish educational system is considered one of the best in the world (Hausstätter & Takala, 2011) it seemed relevant to prompt the question whether we have the same problems as described above.

## RESEARCH QUESTIONS

The research questions arising from the literature presented above are:

**RQ1.** How is teacher discourse during practical work distributed between the two domains *O* and *I*?

**RQ2.** How much do the teachers make links between these two domains i.e. use discourse in the domain *I/O*?

**RQ3.** How does the nature of activity in class affect the domain of teacher discourse used?

## METHODOLOGY

### Collecting Data

The data collection was done as a part of the international research project Quality of Instruction in Physics (Fischer, Labudde, Neumann & Viiri, 2014). Two subsequent physics lessons of about 45 minutes were recorded in lower secondary schools in Central Finland during the years 2008 and 2009. For this exploratory case study (which is in no way connected with the QuIP-project apart from the mutual data) eight lessons were selected and the lessons are identified by the teacher number as coded in the original videos (10, 12, 20 and 24). The two two-lesson sequences that were not double lessons are identified as 20:1 and 24:1 for the first lesson, and 20:2 for the second one (lesson 24:2 contained no practical work periods).

The topics of the lessons were electrical power, energy and the cost of electricity. The pupils were approximately fifteen years of age and had studied physics for about four years (since fifth grade). The lessons were video- and audiotaped with two cameras and six microphones. One camera and microphone concentrated on the teacher and the rest on the general classroom view and the students (Fischer & Neumann, 2012).

### Method of Analysis

The teachers' discourse during the lessons was categorised using ideas by Millar *et al.* (1999) in the three domains: *O*, *I* and *I/O* (Table 1). In addition a fourth category, involving the periods when the teacher was silent or spoke about things unrelated to the physics teaching (*S*), was added.

The discourse was analysed in intervals of thirty seconds i.e. a period of thirty seconds always got the same categorization depending on which of the four types of discourse dominated during that period. The length of the thirty-second interval was chosen because it is long enough for a person to make an argument, question or such, yet short enough not to involve several of them.

*Table 1: The categorization of teachers' discourse into the domains O and I. Entry 'I or O' means that the discourse could be categorised into either of the domains depending on the context.*

| The contents of the discourse                       | Domain |
|-----------------------------------------------------|--------|
| Introduce a phenomenon, an object or an observable  | O      |
| Present a fact                                      | O      |
| Introduce a piece of equipment and/or how to use it | O      |
| Present how to carry out a standard procedure       | O      |
| Present how to process measured data                | O      |
| Present how to use data to support a conclusion     | I or O |
| Present a relationship                              | I or O |
| Present a concept                                   | I      |
| Present a theory or a model                         | I      |

The nature of activity in class (i.e. the form of classroom interaction and the phases of practical activities in class) was also analysed in intervals of thirty seconds. The categories for the forms of classroom interaction were 1 None, 2 Lecture by the teacher, 3 Dictation, 4 Class discussion, 5 Individual work, 6 Pair work, 7 Group work, 8 Several kinds of interaction at the same time, 9 Transition (Seidel, 2005). The categories for the phases of practical activities were E0 None, E1 Introduction, E2 Activity, E3 Discussion (Teach, 2005).

Two kinds of graphs were produced to illuminate the dynamical changes of teacher discourse with respect to, on the one hand, the form of classroom interaction, and on the other hand, the phases of practical activities (see Figures 1, 2 and 3). On the horizontal axis in all the graphs is class time starting from when the lesson begins and ending when the teaching ends. Each of the coloured dots on the graphs represents a period of thirty seconds.

The coding of data was done by the first author. To check the interrater reliability approximately twenty percent of the data was coded by a second coder (author two) and Cohen's kappa was calculated to be 0.621 which indicates a 'substantial agreement' (Viera & Garrett, 2005).

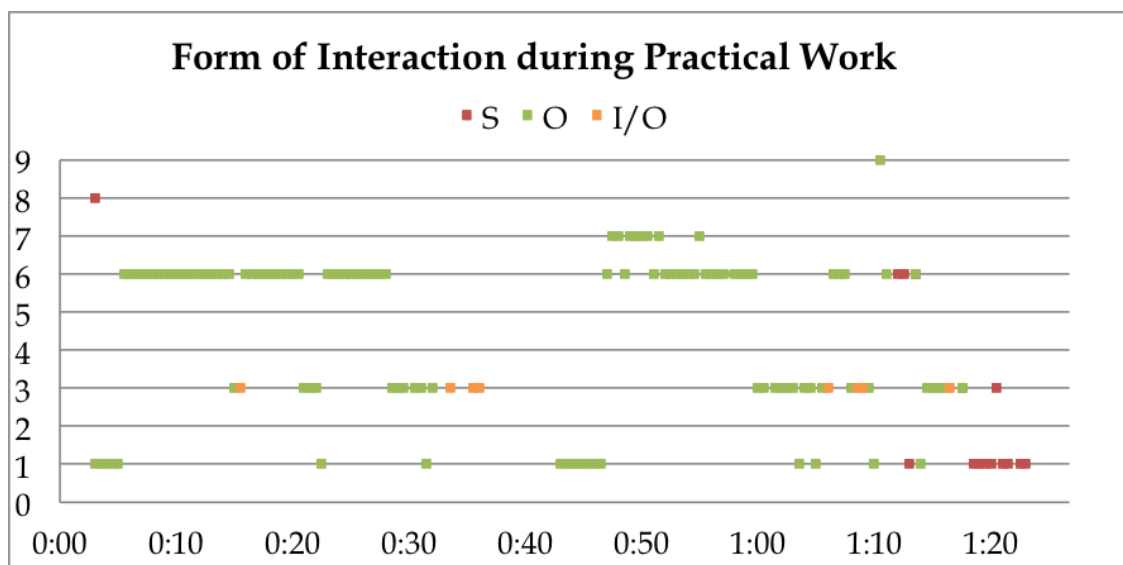


Figure 1: The forms of classroom interaction (see text for the categorisations) during practical work in lesson 10 shown as function of class time (in minutes and seconds). The domain of teacher discourse is colour coded as S, O and I/O.

## RESULTS

A vast majority of discourse during practical work is in domain O (apart from one exception over 90%) (Figures 1 and 2, Table 2). The exception in lesson 20:1 was not due to a particularly large amount of discourse outside the domain O, but was caused by the very short length of the practical activity (Figure 3).

There was a lack of discourse in the domain I during practical activity (coded as E2): only one 1-minute period was included in the eight lessons (Figure 3). However, it must be clarified that there was discourse in the domain I during the lessons, but for the most part it happened during non-practical work (E0, see Figure 3).

Table 2: The percentages of teacher discourse in domains O, I/O and I during practical work. Discourse in domain S and discourse during non-practical work has been excluded from this table.

| Domain | Lesson 10 | Lesson 12 | Lesson 20:1 | Lesson 20:2 | Lesson 24:1 |
|--------|-----------|-----------|-------------|-------------|-------------|
| I      | 0         | 0         | 11          | 0           | 0           |
| I/O    | 7         | 9         | 22          | 0           | 3           |
| O      | 93        | 92        | 67          | 100         | 97          |

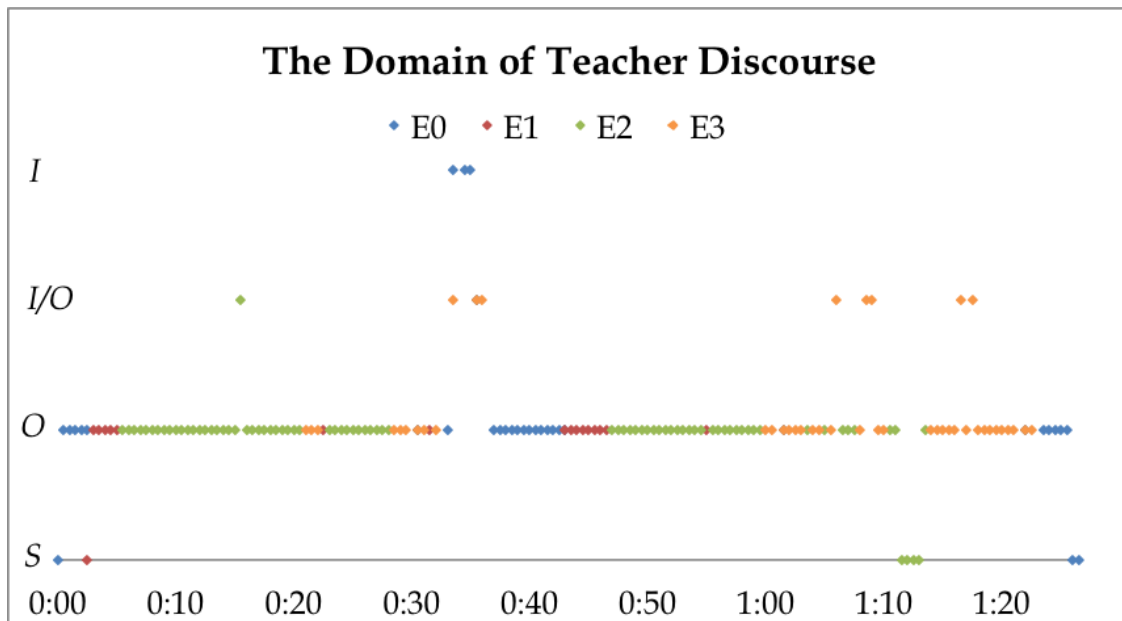


Figure 2: The domain of teacher discourse as function of class time in lesson 10. The phases of experimental activities are colour coded: blue (E0) denotes non-practical activities and the other colours (E1-E3) practical activities (see text for the exact categorisations).

Discourse in domains *I* and *I/O* was focused on teacher lectures and whole class discussion (see Figure 1). Furthermore, in five out of seven lessons the majority of the discourse in domains *I/O* and *I* happened during the discussion phase of the practical activity (Table 3). However, to make well-justified statements, further research and more data would be required due to the relatively large fluctuations with respect to the sample size.

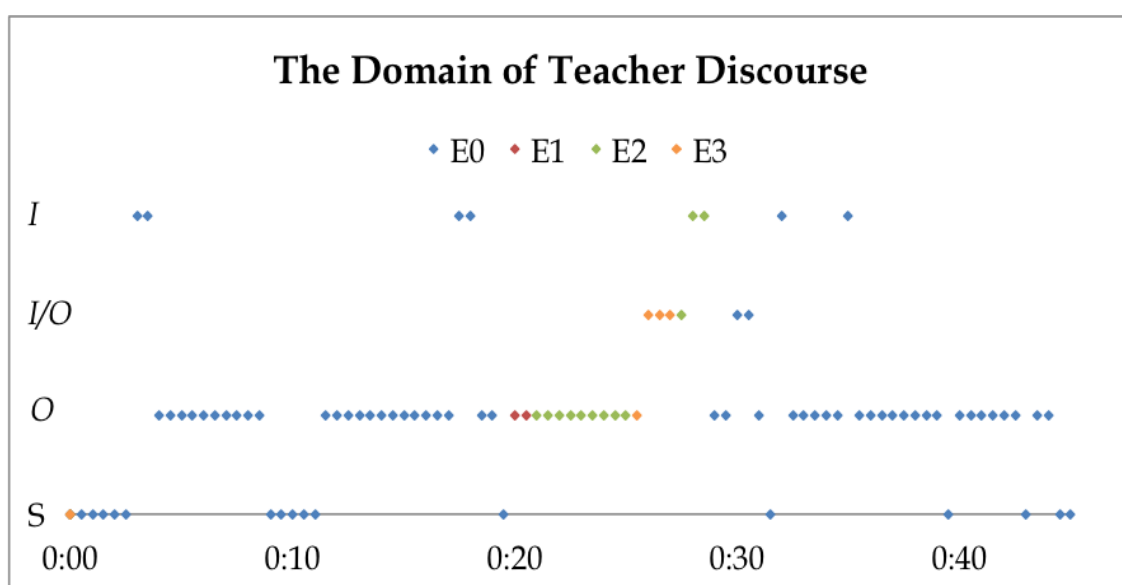


Figure 3: The domain of teacher discourse during lesson 20:1.



Table 3: The percentages of discourse in domains *I/O* and *I* during practical work with respect to the phase of the practical activity. Discourse during non- practical work has been excluded from this table.

| Phase           | Lesson<br>10 | Lesson<br>12 | Lesson<br>20:1 | Lesson<br>20:2 | Lesson<br>24:1 |
|-----------------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| E1 Introduction | 0            | 0            | 0              | 0              | 100            |
| E2 Activity     | 11           | 0            | 50             | 0              | 0              |
| E3 Discussion   | 89           | 100          | 50             | 100            | 0              |

## DISCUSSION

The purpose of RQ 1 was to find out how teacher discourse during practical work is distributed between the two domains *O* and *I*. There was virtually no discourse observed in domain *I*. This is hardly surprising when considered from the everyday point of view of a physics lesson: it would seem to make little sense to talk about phenomena purely in the domain of ideas during a practical task, especially in the light of the purpose of practical work by Millar *et al.* (1999) (making links between domains *O* and *I*). However, the results show that there is some discourse purely in the domain *I* during lessons, only it is concentrated around non-practical activities (Figures 2 and 3). The analysis of the phase of practical activities and classroom interaction was applied to this study precisely so that these sorts of dynamical nuances behind the domain of discourse could be detected.

Compared to the previous studies our graph-based analysis shows not only the different domains of discourse but also the time distribution of it. Thus, together with the analysis of the nature of activity in class, the graphs illustrate the dynamics behind the teacher discourse, e.g. shifts from discourse of *O* to *I/O* within one form of interaction (see Figure 1, interaction code 3). These sorts of illustrations have the capacity to bring explicitness to the analysis and thus help reflection of classroom discourse, an important aspect that has great potential in e.g. in-service and pre-service teacher training (Viiri & Saari, 2006).

A vast majority of discourse during practical work is in domain *O*. This finding is in line with that of and Abrahams and Millar: “The overwhelming sense, from the set of lessons observed, was that a high priority for teachers is ensuring that the majority of students can produce the intended phenomenon, and collect the intended data” (2008, p. 1955). Furthermore, also Börlin and Labudde (2014) came to the same conclusion in the QuIP-project using the same data as this

study did, which further validates this result and the reliability of the qualitative analysis.

However, there were instances in the lessons examined where clear opportunities to discuss the ideas behind the practical activities presented themselves and the teacher overlooked them. A typical example of these would be a situation where a student had put in his/her wirings incorrectly and the teacher, instead of prompting reflection on why the measurements made no sense, just said “that’s wrong, switch the meters”.

RQ 2, are connections being made between the domain of objects and observables and the domain of ideas during practical work, was very important due to the role of the teacher as a facilitator in the process of constructing students’ knowledge (Driver *et al.*, 1994; Hodson, 2014; Scott *et al.*, 2011). It was found that indeed these connections are made, however the amounts of time used for this sort of discourse are not that impressive across the board (Table 2, Figures 2 and 3). When comparing these results to those of Abrahams and Millar (2008) one may suggest that the results somewhat indicate towards Finnish teachers making a more links to the domain of ideas during practical work. Abrahams and Millar found that 20 out of 25 science teachers used no time at all to discuss the ideas or models to be used during practical work and in this study only one out of five did so (Table 2). However, to make well-justified statements the sample should involve a lot more teachers.

Nevertheless, one unambiguous observation can be made from the data: although the amounts of discourse in domain *I/O* were not impressive, at least most of the students seemed to be aware of the ideas they were intended to use during the practical work. This was observed in the videos as the teachers engaged the students to answer questions about the practical work and the students being able to answer them as illustrated by this extract:

**Teacher 24:** What do you need to measure (to determine the power of a light bulb)?

**John:** Voltage and electrical current.

**Teacher 24:** Yes, so you’ll need both meters.

Although this does not necessarily implicate that all the students had understood the purpose and content of the practical activity with respect to the theory and/or vice versa, it suggests that they were familiar, at least on the conceptual level, with the ideas the teacher intended them to use. We consider this a positive observation compared to that made by Abrahams and Millar: “...in many of the tasks observed, the students appeared unfamiliar with the ideas that the teacher intended them to use” (2008, p. 1956).

RQ 3 is interesting one with respect to everyday teaching. The effect of the nature of activities in class, that is the phase of the practical activity and of the form

of classroom interaction, to the domain of discourse is directly connected to classroom practices. In the case of the phase of the practical activity the results were inconclusive: there were implications of the discussion phase (E3) being the one where most connections are made between the domains *I* and *O* but the results between different lessons were not coherent enough to make a valid argument (Table 3). This result points towards the same direction as the study by Tiberghien (1999), which showed that most connections between the theoretical models and the tangible objects and events were made during the discussion phase of practical work.

Studying the forms of classroom interaction during practical work did, however, produce an unambiguous result: the discourse in domains *I* and *I/O* was focused almost exclusively on teacher lecturing and class discussion (Figure 1). Inquiry approaches in Finnish classrooms do not seem to correlate with better learning outcomes: experiments are worryingly too often carried out following predefined, narrow steps rather than providing an environment for authentic inquiry and students thinking of the *I/O* relation (OECD, 2007).

Based on our present data we cannot say whether the teachers meant for the students to be actively engaged in the task with their minds as well as their hands, and if yes, why was there no evidence of this. Unfortunately these questions cannot be answered since teacher interviews were not included in the data, further research is required to be able to give any well-justified statements on the matter.

### Implications

A logical step onwards from this study would be to study student discourse during practical work to see if students are indeed making links to the domain of *I*. Also, in future research it would be interesting to map ideal discourse patterns, i.e. *O*, *I* and *I/O* -ratios, during practical work as suggested by science education literature or by science teachers. However, should this or e.g. teacher discourse be studied further, interviews are crucial to provide a more complete picture of the pedagogical motives behind the instruction.

In teacher education, both pre-service and in-service, teachers should be prompted to reflect on the importance of making links between the domains *O* and *I* during practical work and given tools to provoke the making of such links. Related to this, another important area to look into are teaching materials and especially what sort of questions do the practical tasks therein contain and how are teachers guided on the instruction of practical work.

### REFERENCES

- Abrahams, I. (2011). *Practical Work in Secondary Science: A Minds-On Approach*. London: Continuum International Publishing Group.

- Abrahams, I. & Millar, R. (2008). Does Practical Work Really Work? A study of the effectiveness of practical work as a teaching and learning method in school science. *Journal of Science Education*, 30(14), 1945–1969.
- Börlin, J. & Labudde, P. (2014). Practical Work in Physics Instruction: An Opportunity to Learn? In E. Hans, P. Labudde, K. Neumann & J. Viiri (Eds.), *Quality of Instruction in Physics – Comparing Finland, Germany and Switzerland*, pp. 112–127. Münster: Waxmann Verlag GmbH.
- Chinn, C.A. & Malhotra, B.A. (2001). Epistemologically Authentic Inquiry in Schools: A Theoretical Framework for Evaluating Inquiry Tasks. *Science Education*, 86(2), 175–218.
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1994). Constructing scientific knowledge in the Classroom. *Educational Researcher*, 23(7), 5–12.
- Fischer, H.E. & Neumann, K. (2012). Video analysis as a tool for understanding science instruction. In D. Jorde & J. Dillon (Eds.), *Science Education Research and Practice in Europe – Retrospective and Prospective*, pp. 115–137. Rotterdam: Sense Publishers.
- Fischer, H.E., Labudde, P., Neumann, K. & Viiri, J. (Eds.) (2014). *Quality of Instruction in Physics – Comparing Finland, Germany and Switzerland*. Waxmann Verlag GmbH.
- Hausstätter, R., & Takala, M. (2011). Can special education make a difference? Exploring the differences of special educational systems between Finland and Norway in relation to the PISA results. *Scandinavian Journal of Disability Research*, 13(4), 271–281.
- Hodson, D. (2014). Learning Science, Learning About Science, Doing Science: Different goals demand different learning methods. *International Journal of Science Education*, 36(15), 2534–2553.
- Millar, R. (2004). *The role of practical work in the teaching and learning of science*, York, United Kingdom: University of York, Department of Teacher Education. Retrieved from [http://informalscience.org/images/research/Robin\\_Millar\\_Final\\_Paper.pdf](http://informalscience.org/images/research/Robin_Millar_Final_Paper.pdf)
- Millar, R., & I. Abrahams (2009). Practical work: making it more effective. *School Science Review*, 91(334), 59–64.
- Millar, R., Le Maréchal, J.-F., & Tiberghien, A. (1999). 'Mapping' the domain: Varieties of practical work. In J. Leach and A. Paulsen (Eds.), *Practical Work in Science Research - Recent Research Studies*, pp. 33–59. Frederiksberg: Roskilde University Press.
- OECD (2007). PISA 2006: Science competencies for tomorrow's world, volume 1 – analysis. Paris: OECD.
- Osborne, J. (2014). Scientific Practices and Inquiry in the Science Classroom. In N. G. Ledermann & S. K. Abell (Eds.), *Handbook of Research in Science Education – Volume II* (pp. 579–599). London: Routledge.

- Scott, P., Mortimer, E. & Ametller, J. (2011). Pedagogical link-making: a fundamental aspect of teaching and learning scientific conceptual knowledge. *Studies in Science Education*, 41(1), 3–36.
- Seidel, T. (2005). Coding Manual – Surface Structures: Organization of classroom activities. In T. Seidel, P. Manfred, and M. Kobarg (Eds.), *How to run a video study*, pp. 79–90. Waxmann Verlag GmbH.
- Teach, M. (2005). Coding Manual – Experiments in Physics Lessons. In T. Seidel, P. Manfred, and M. Kobarg (Eds.), *How to run a video study*, pp. 91–107. Waxmann Verlag GmbH.
- Tiberghien, A. (1999). Labwork activity and learning physics - an approach based on modelling. In J. Leach and A. Paulsen (Eds.), *Practical Work in Science Research - Recent Research Studies*, pp. 176–194. Frederiksberg: Roskilde University Press.
- Viera, A. & J. Garrett (2005). Understanding Interobserver Agreement: The Kappa Statistic. *Family Medicine*, 37(5), 360–363.
- Viiri, J. & Saari, H. (2006). Teacher talk patterns in science lessons. Use in teacher education. *Journal of Science Teacher Education*, 17(4), 347–365.



## CHANGING A PRE-SERVICE TEACHER'S BELIEFS ABOUT MATHEMATICS TEACHING THROUGH RECURSIVE USE OF VIDEO STIMULATED RECALL

Raimo Kaasila, Sonja Lutovac & Hannu Juuso

University of Oulu, Faculty of Education

*It is challenging and time-consuming to change pre-service teachers' beliefs about teaching mathematics. We demonstrate one pre-service elementary teacher's perspective on the change in his beliefs regarding teaching mathematics during teaching practice. The change was facilitated by supervision discussions and video-stimulated recall (VSR). We used VSR recursively in two different ways: first, as a tool for promoting reflection on the lesson during the supervision discussion and, second, as a basis for interviewing the pre-service teacher, where the video of the supervision discussion was used. The findings reveal how the pre-service teacher's beliefs began to change and the significance of the facilitators. Recursive use of VSR arguably has great potential for facilitating change.*

### INTRODUCTION

Research into teachers' and students' beliefs regarding mathematics is extensive (Furinghetti & Pehkonen, 2002; Maasz & Schlöglmann, 2009). The first author of this paper has previously studied pre-service elementary teachers' beliefs about mathematics and their views of mathematics (see e.g. Kaasila, Hannula, Laine, & Pehkonen, 2008). In addition, with a colleague he also studied pre-service teachers' mathematical identity (Lutovac & Kaasila, 2011/2014). Generally, research shows that pre-service teachers have deeply rooted, one-sided and often teacher-centred beliefs of what it means to teach and learn mathematics. The process of changing beliefs about learning and teaching mathematics is challenging and often time-consuming, and reflection is a crucial part of this process. Teaching practice plays a central role in efforts to promote reflective processes among pre-service teachers. During teaching practice, pre-service teachers usually have an opportunity to analyse their own teaching in discussions with their supervisors. Many studies (Hatton & Smith, 1995; Smith, 2005) argue that dialogue is needed to promote reflection among pre-service teachers, to explore their beliefs, and to encourage them to apply their own ideas and practices.

In this pilot study, we examine the perspective of one pre-service elementary teacher, Jani, regarding the changes in his own beliefs during third year teaching practice at one teacher training school in Finland. A mathematics lesson that he taught was recorded. After the lesson, Jani and his supervising teacher Sari had a supervision discussion based on the video recording of his lessons. Based on his memories of school, Jani is very proficient in mathematics, but he had not taught mathematics before the teaching practice started. Sari is an experienced

supervising teacher who is also qualified to be a mathematics teacher. Later, we conducted an interview with Jani while watching a video of the supervision discussion. We labelled the later process of using VSR as *recursive use of VSR*. In short, the novelty of this study lies in demonstrating that there are at least two useful ways of applying VSR: first, as a tool to promote reflection on the lesson during the supervision discussion, and second, as a basis for later interviews. In this paper, we show how Jani sees the changes in his own beliefs related to teaching mathematics through the use of facilitators such as supervision discussion and recursive use of VSR. The research questions are: What are one pre-service teacher's views of the changes in his own beliefs related to teaching mathematics during teaching practice? What is the role of supervision discussion and recursive use of VSR in the process of changing beliefs about teaching mathematics?

## **BELIEF CHANGE IN A MATHEMATICS EDUCATION CONTEXT**

Pehkonen (1994) captures well the central role of beliefs in learning and teaching mathematics by recognizing beliefs as a filter which applies to almost everybody's thoughts and actions concerning mathematics. Prior experience affects people's beliefs, usually unconsciously. The importance of changing beliefs during teacher training has also been raised, and many teacher educators are finding ways to address this issue in their mathematics education courses (Vacc & Bright, 1999; Smith, Williams, & Smith, 2005). Researchers agree that it is possible to change pre-service teachers' beliefs, such as those regarding teacher-centred teaching (Kaasila et al., 2008), but it usually takes time.

Building on Furinghetti and Pehkonen (2002), we understand beliefs as subjective, experience-based, often implicit knowledge about some matter. Arguably, beliefs are contextual (Beswick, 2007). Beliefs are formed as a result of prior experience, and thus pre-service teachers' own school experiences generate much of their beliefs regarding learning and teaching mathematics. Reflection has been shown to be an effective pedagogical tool for making pre-service teachers aware of their own beliefs, and also for encouraging change in their beliefs and practices (Kaasila & Lauriala, 2012). Reflection helps pre-service teachers achieve a new understanding of their own thinking and actions, while also paying attention to their emotions (see LaBoskey, 1993). When considering teaching reflectivity through supervision discussions, it is possible to integrate the learning of reflection and the teaching of knowledge and skills into a cohesive educational experience by facilitating reflection by students and by helping them to see pedagogical alternatives (Kaasila & Lauriala, 2012). We see the tension or the gap as a condition for evoking the change of beliefs. Arguably, superficial reflection does not lead to a change in beliefs (Lutovac & Kaasila, 2011).



There are several existing models of belief change. In the mathematics education context, Kaasila et al. (2008) have constructed a model of pre-service teachers' change of beliefs by combining certain key elements of models by Smith et al. (2005) and Senger (1999): 1) Problematizing current beliefs and practices, in which students accept that their views of mathematics are not the best possible. 2) Becoming aware of a new approach in which students create new, personal visions of what learning and teaching mathematics should look like. 3) Exploring and testing alternative beliefs and practices in teaching and in verbalising new beliefs. 4) Reflectively analysing the benefits, in which students become more convinced of the new beliefs that they are adopting. 5) Changing views of mathematics and teaching practices.

### **VSR AS A FACILITATOR OF CHANGE**

VSR is increasingly being used in research into the professional development of teachers (Meijer, Beijaard, & Verloop, 2002), including in a mathematics education context for in-service teachers (Borko, Jacobs, Eiteljorg, & Pittman, 2008). It has been argued that video recordings can highlight aspects of classroom life that a teacher might not notice while conducting a lesson (Clarke & Hollingsworth, 2000). VSR has also been found to enhance reflection (see e.g. Rosaen, Lundeborg, Cooper, Fritzen, & Terpstra, 2008). Powell (2005) found that VSR dialogues enabled teachers to articulate their thinking and emotions by defining a focus and context for inquiry into their professional practice. When they viewed video footage of their lessons, pre-service teachers' observations were more specific and their focus moved away from themselves and onto the children (Rosaen et al., 2008). That is why we simultaneously used VSR and a supervision discussion: the lesson was recorded and viewed by a pre-service teacher together with his supervising teacher. The supervisor guided the discussion by observing elements in Jani's teaching that he did not notice. On the other hand, thus far, there has not been much systematic research into the effectiveness of various uses of video in the professional development of teachers (Brophy, 2004). We are thus seeking to shed some light on the meaning of VSR, and we aim to do that from the pre-service teacher's perspective.

### **METHODOLOGY**

#### **Data Collection**

In this paper, we describe the findings of a pilot study. The research subjects of the wider research project are 15 fourth-year, pre-service elementary teachers from the Faculty of Education at the University of Oulu in Finland, and seven supervising teachers from Oulu University Teacher Training School. Here, however, we examine the change in the beliefs of one pre-service teacher, Jani, related to teaching mathematics. Our data collection consisted of three phases through which we obtained: 1) video data concerning the pre-service teacher's

first mathematics lesson; 2) video data concerning the supervision discussion; and 3) interview data. In the first phase, we video-recorded Jani's first mathematics lesson in teaching practice. In the second phase, Jani and his supervisor Sari discussed the pedagogical events in the first video. We also video-recorded that supervision discussion.

In the third phase, we interviewed Jani and Sari separately based on the video of the supervision discussion. We asked Jani to describe his views and beliefs during the critical events (turning points) that the researchers selected from the video. We also asked Jani to reflect on Sari's supervision and its possible significance for the change in his beliefs. In order to describe the changes in Jani's beliefs from his own viewpoint, here we mainly focus on the data from Jani's interview. When collecting the video data, we relied on the M.O.R.E. camera system (Mobile Multimodal Recording System), which can be used in different locations in a classroom. External microphones made it possible to record small-group interactions and teachers' conversations with individual students, which would otherwise have gone unnoticed through observation alone (Borko et al., 2008).

### Data Analysis

Our study is a narrative case study (Lieblich, Tuval-Mashiach, & Zilber, 1998; Kaasila, 2007; Lutovac & Kaasila, 2014). Through *emplotment* (see Polkinghorne, 1995), we presented a narrative that helps readers understand how Jani's beliefs began to change. We paid particular attention to Jani's new interpretations of his beliefs and the arguments that he used to justify and defend his earlier beliefs or to distance himself from them. We also examined the facilitators that Jani mentioned when he was asked to reflect on possible changes in his beliefs about teaching mathematics. Based on all the data, including video recording of the lesson and the supervision discussion, we were able to create the context when emplotting Jani's narrative.

## RESULTS

Jani is a pre-service elementary teacher in his third year of studies. He taught mathematics for the first time in the third-year teaching practice. He was teaching a third-grade class, and the topic of the lesson was fractions. Jani's overall view of his lesson was positive. However, during the supervision discussion, his supervisor Sari pointed out that Jani had conducted the lesson in a teacher-centred way. On the basis of the discussion, Jani began to think that the supervisor's comment made sense. He realized that his lesson could have been more pupil-centred. Jani reflected about this in the following way:

I had not taught mathematics at all before. I did not have enough trust in my skills to make greater use of the pupils' actions, because as a young teacher, I had a fear that it simply would not work. I was afraid that if I move my

teaching in a more pupil-centred direction and make more use of their own actions and problem-solving, the lesson would fall into chaos.

Jani's reflection shows that he sees himself as a novice and was therefore not willing to take any risks in planning and conducting his lesson. He feared failure, which would in turn be debilitating for his pupils. It also appears that he adopted a deeply rooted belief that pupil-centred teaching would lead to "chaos". Jani continued:

I trusted pupils' abilities to discover the content. I was thinking that the method that I used helps pupils to understand the content better. But if I had tried pupil-centred teaching in my own way with my limited experience, I would not have been confident that they would have understood it as well.

Jani's report shows that, despite the fact that he did experience a change in his belief based on the supervisor's comments, he still has some teacher-centred beliefs. His opinions demonstrate his lack of self-confidence and his doubt that he would have been successful if he had applied pupil-centred teaching. We see that he uses a lot of explanation to justify his behaviour in the lesson.

Jani experienced one especially challenging episode during his lesson. Sari pointed out that, in line with his teacher-centred approach, he had not given the pupils enough time to think before he revealed the solution to a problem. In the interview, Jani reflected on the episode and understood the feedback Sari gave him: "I understood what Sari meant when she said 'Give the pupils more time to think'. It makes the lesson more pupil-centred. I made a clear mistake when I gave the answer too soon."

This extract from the data shows that, in the interview, Jani was able to distance himself from this challenging episode during the lesson. Now he is willing to acknowledge that he made a mistake because he did not wait until the slower pupils had also had enough time to think about the solution. Jani further analysed his actions:

I understood from what Sari said that when the pupil gave the right answer, I did not give him any direct feedback. Instead, I gave the feedback by pressing a button on the Smartboard, and it gave the feedback to the pupil. I made a mistake. I should have praised the pupil first, and after that used [the Smartboard].

Related to the episode, Jani also said the following:

I believe very strongly in more pupil-centred teaching, but as my lessons in some way show, I don't have enough experience to believe that it works. I noticed that my lessons would have been more pupil-centred if I had known the pupils better. Sari has taught these pupils for many years and knows very well what methods are relevant. I agree with her that using these kinds of

small things makes it possible to move the lessons in a more pupil-centred direction. I also agree that a teacher should be able to handle situations where nobody raises their hands to answer.

Here, Jani first emphasises his belief in the importance of pupil-centred teaching, but immediately after that he gives many explanations for why he has not applied this kind of teaching. He seems to be shifting between a new understanding and defence of his actions. Justifying himself also shows that Jani felt this event was very challenging.

During the supervision discussion with Jani, Sari chose to discuss an episode that she thought was particularly important. Based on the video recording, Sari pointed out that Jani had ignored a question from one pupil, and that making use of situations like that is very important. Sari said, *"The pupil's question was like a diamond!"* While watching the video, Jani was surprised at the quality of the pupil's question and began to realize that he indeed did not exploit that valuable classroom situation. In the interview, Jani further reflected:

This was one of the best comments on the lesson, and a very important one for me too, when I think about my teacher education studies: When a child is interested in something, they should always at least be praised by saying "What a brilliant question!" Maybe I froze a bit and was thinking that they need to know the answer to that yet. As Sari said, it was like a knockout blow from the pupil. I was a bit ashamed. But afterwards, I thought about how great a learning experience this was for me. The aim of teaching practice is that people should learn from their mistakes.

Jani described well his feelings of shame by using the expression *"Like a knockout blow from the pupil"*. Arguably, distancing himself from the challenging episode helped him to see it as a great learning experience, and he emphasises the idea of learning from mistakes. Jani's views reflect well the self-development language that is often present in discussions with Finnish pre-service teachers (Lutovac & Kaasila, 2014; Kaasila et al., 2012).

At the end of the interview, Jani reflected on what he had learnt during the teaching practice and summed up the three most important lessons in the following way:

First, I have learnt that it is not appropriate to choose the content of the lesson directly from a textbook. The teacher must make the choice on the basis of what is the best way for the children. Second, give space for the thinking of the children. They are able to discover things if you give enough time for them. Don't tell them the solutions, elicit them from the children. They have good ideas, talk with them. Third, when a pupil is motivated to talk about something, it is good to make use of this.

Above, we see first that Jani's earlier belief that teaching mathematics should be textbook-based has changed. Second, he also pointed out that he changed his earlier belief that pupils are not able to discover solutions themselves. Third, he emphasises that for teachers it is important to take advantage of interest from pupils. Jani also reflected on Sari's method of supervising:

Sari's aim is to supervise so that I examine my teaching in a critical way and identify for myself the things that have been good and bad. She emphasises discussion and interaction ... She is really focused on whether students understand the feedback. In her supervision, the goal of promoting growth as a teacher is always present, and it is an important thing ... Sari's supervision included a clear focus. From the perspective of a pre-service teacher, it is good to go back to the discussion, because immediately after the lesson I was nervous and in a very emotional state, not least because the discussion was being recorded. I understood the greater part of Sari's supervision at the time, but afterwards I began to reflect more on what she meant ... Sari's supervising includes a lot of storytelling and discussion.

Based on what Jani says, it seems he is satisfied with Sari's supervision, and particularly with its clear focus. Jani honestly revealed the negative emotions he experienced during the supervision discussion and was able to reflect on the events in his teaching in a more analytical way. Finally, Jani saw the recursive use of VSR as useful for changing his beliefs as well as his practices:

When a pre-service teacher makes many mistakes, as this video shows well, it is possible to begin to understand the views of the supervisor ... The body language that was present in the video was also useful. It shows what was happening when the thing began to internalise in the mind ... I agree that using video like this could become a permanent part of supervision in the future. When I was watching the video, I noticed a lot of new things related to my teaching and body language.

Jani here reveals the ways in which recursive use of VSR can facilitate the reflection process and further, the change of beliefs. First, Jani was able to understand the supervisor's feedback because it was supported by clear video evidence. Second, seeing himself react to the supervisor's feedback helped him become more aware of himself, too.

## DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The findings of our pilot study illustrate one pre-service teacher's reflections on his change of beliefs during the supervision discussion supported by the recursive use of VSR. The pre-service teacher had conducted his lesson in a teacher-centred way, and when reflecting on the lesson, he used teacher-centred beliefs as a filter (Pehkonen, 1994) through which he observed all his actions in the lesson. Jani's lack of self-confidence in teaching is perhaps surprising, but it only

made it evident that a strong background and proficiency in mathematics do not automatically make somebody good at teaching mathematics.

During the supervision discussion, the pre-service teacher began to explore and reflect on his beliefs in a critical way. The bigger change seemed to begin during the interview, when the VSR was applied again and the student was interviewed while watching key video clips from the supervision discussion. The student's beliefs about the role of pupils in learning began to change: now he sees them as playing a more active role than he did before, and he sees that they are able to discover solutions for themselves if he gives them enough time and space for their thinking. Moreover, his beliefs about the role of textbooks as a basis for teaching also apparently began to change.

The supervisor appeared to play a significant role in promoting these changes in Jani's beliefs. The supervision discussion helped the student to explore his beliefs, and therefore he began to see things differently (Fanselow, 1988). The supervisor also appears to have used role modelling in an effective way by thinking out loud about her pedagogy and justifying her choices (Loughran, 1996), and the recursive use of stimulated recall was a useful tool in the supervision discussion for changing Jani's beliefs. When he used VSR, Jani was also able to make more specific observations about his lesson, and his focus shifted away from himself to the pupils (Rosaen et al, 2008).

Considering the process of the changes in Jani's beliefs, it fits in with the first phases of the model that Kaasila et al. (2008) constructed. During the supervision discussion, the student went through phase 1 by problematizing his current beliefs and practices. He also began phase 2: in the interview, he became more aware of a new approach, and created a vision of his future teaching. In the supervision discussion, he also began to verbalise new beliefs (phase 3), and to reflectively analyse its benefits (phase 4). Still, on the basis of our limited data we cannot be sure that he had changed his beliefs (phase 5), and that this change would be permanent. Our study shows that emotions play a key role in promoting reflective processes (LaBoskey, 1993). Based on VSR, Jani was able to observe his body language during the supervision discussion, which signalled the emotions he was experiencing while receiving feedback. This seemed to have initiated within Jani a process of becoming more aware not only of his own thoughts and actions, but in a wider sense, of himself professionally and personally. The latter is an interesting finding, as it offers the opportunity to apply recursive use of VSR in order to study other contemporary problems, such as teacher identity in a mathematics education context (Lutovac & Kaasila, 2011, 2014). For us as researchers, the recursive use of VSR helped us to validate our own interpretations that we made on the basis of analysing the supervision discussion. We intend to further consider this issue later.

Finally, we are aware of the limitations of our study; nonetheless, we have provided here the pilot findings. We acknowledge the need for further investigation of pre-service teacher's teaching in order to ensure that Jani's new beliefs influence his teaching practice (see also Vacc & Bright, 1999), as well as whether VSR is a relevant facilitator of changes in beliefs and practices.

**Acknowledgements:** This article is dedicated to the memory of post-doctorate researcher Ari Sutinen. He played a central role in the project,

## REFERENCES

- Beswick, K. (2007). Teachers' beliefs that matter in secondary mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 95–120.
- Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. E. (2008). Videos as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 417–436.
- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2000). Seeing is understanding. *Journal of Staff Development*, 21(4), 40–43.
- Fanselow, J. F. (1988). "Let's see": Contrasting conversations about teaching. *TESOL Quarterly*, 22(1), 113–30.
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations of Belief. In G. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds.), *Mathematical beliefs and their impact on the teaching and learning of mathematics* (pp. 39–57). Dordrecht, Netherlands: Kluwer
- Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education*, 11(1), 33–49.
- Kaasila, R. (2007) Using narrative inquiry for investigating the becoming of a mathematics teacher. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education* 39, (3), 205–213.
- Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A., & Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics*, 67(2), 111–123.
- Kaasila, R., & Lauriala, A. (2012). Pre-service teachers' reflective processes and reflectivity in relation to contextual, emotional and biographical factors. *European Journal of Teacher Education*, 35(1), 77–88.
- Kaasila, R., Hannula, M. S., & Laine, A. (2012) "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but..." Analyzing pre-service teachers' mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 975–995.

- LaBoskey, V. (1993). A conceptual framework for reflection in preservice teacher education. In J. Calderhead & P. Gates (Eds.), *Conceptualizing reflection in teacher development* (pp. 23-38). London, England: Falmer Press.
- Lieblich, A., Tuval-Mashiach, R., & Zilber, T. (1998). *Narrative Research. Reading, Analysis and Interpretation*. London, England: Sage.
- Loughran, J. (1996). *Developing reflective practice: Learning about teaching and learning through modeling*. Washington, DC: Falmer Press.
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher's mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education*, 16(2), 225-236.
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2014). Pre-service teachers' future-oriented mathematical identity work. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 129-142.
- Maasz, J., & Schlöglmann, W. (2009). *Beliefs and attitudes in mathematics education: New research results*. Rotterdam, Netherlands: Sense.
- Meijer, P. C., Beijaard, D., & Verloop, N. (2002). Examining teachers' interactive cognitions using insights from research on teachers' practical knowledge. In C. Sugrue & C. Day (Eds.), *Developing teachers and teaching practice* (pp. 162-178). London, England: Routledge.
- Pehkonen, E. (1994). On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal für Mathematik Didaktik*, 15(3/4), 177-209.
- Polkinghorne, D. E. (1995). Narrative configuration in qualitative analysis. In J. Hatch & R. Wisniewski (Eds.), *Life history and narrative* (pp. 5-23). London, England: Falmer.
- Powell, E. (2005). Conceptualising and facilitating active learning: Teachers' video-stimulated reflective dialogues. *Reflective Practice*, 6(3), 407-418.
- Rosaen, C. L., Lundeberg, M., Cooper, M., Fritzen, A., & Terpstra, M. (2008). Noticing noticing. *Journal of Teacher Education*, 59(4), 347-360.
- Senger, E. (1999). Reflective reform in mathematics: The recursive nature of teacher change, *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 199-221.
- Smith, K. (2005.) Teacher educators' expertise: what do novice teachers and teacher educators say? *Teaching and Teacher Education*, 21, 177-192.
- Smith, S., Williams, S., & Smith, M. (2005). A process model for change in elementary mathematics teachers' beliefs and practices, in G. Lloyd, M. Wilson, J. Wilkins & S. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27<sup>th</sup> annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (CD-ROM)*, Roanoke: Virginia Polytechnic Institute.



Vacc, N., & Bright, G.: 1999, Elementary pre-service teachers' changing beliefs and instructional use of childrens' mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education* 30(1), 89-110.



## OPETTAJAOPISKELIJOIDEN MATEMAATTISEN OPETTAJANTIEDON KEHITTÄMINEN OPETUSINTERVENTION AVULLA

Mika Koponen, Mervi A. Asikainen, Antti Viholainen & Pekka E. Hirvonen

Itä-Suomen yliopisto

*Tutkimusten mukaan opettajille muodostuu usein varsin pirstaleinen kuva matematiikan opettamiseen tarvittavasta tiedosta. Ongelman osatekijä saattaa olla se, että opettajat eivät osaa jäsentää opettajankoulutuksessa opittua tietoa riittävän hyvin. Opettajat tarvitsevat ajattelunsa avuksi mallin, jonka avulla tietoa voidaan jäsentää. Tässä artikkelissa tarkastelemme opetusintervention teoreettisia lähtökohtia, jolla ongelmaa pyritään ratkaisemaan. Opetusinterventio on tarkoitettu opettajaopiskelijoille ja siinä sovelletaan uudenaikaisella tavalla kahta eri teoreettista mallia. Tutkimus antaa lisää tietoa siitä voidaanko opettajaopiskelijoille muodostaa yhtenäisempi käsitys matematiikan opettamiseen tarvittavasta tiedosta opetusintervention avulla.*

### OPETTAJANKOULUTUKSEN ARVIOINTIPOHJAINEN KEHITTÄMINEN

Matematiikan opettajankoulutusta tulisi kehittää sekä opetussisältöjen että opetusmenetelmien osalta (ks. Koponen, Asikainen, Viholainen & Hirvonen, 2014 & 2015). Osalle valmistuneista matematiikanopettajista on muodostunut jokseenkin pirstaleinen kuva matematiikan opettamiseen tarvittavasta tiedosta. Opettaja voi kokea osaavansa matematiikkaa ja pedagogisia periaatteita, mutta hänellä on vaikeuksia soveltaa opettajankoulutuksesta opittua tietoa kouluopetukseen (Koponen, ym., 2015).

Opettajankoulutuksessa käsitellyt asiat muodostavat laajan kokonaisuuden ja niiden kuuluisi luontevasti yhdistyä myös kouluopetukseen. Haasteena on kuitenkin se, että opettajankoulutuksen kokonaisuus noudattaa enemmän analyttistä kuin holistista ideologiaa. Opettajaopiskelijoille opetetaan pala palalta uutta asiaa ja toivotaan, että lopulta he näkevät kokonaisuuden ja sen kuinka opittua tietoa sovelletaan käytäntöön. Holistisen ideologian mukaan oppijalle luodaan ensin mielikuvia kokonaisuudesta ja vasta sen jälkeen keskitytään yksityiskohtiin. Opettajaopiskelijan on kuitenkin ilman opetuskokemusta vaikea hahmottaa, miksi kutakin asiaa opiskellaan. Bransfordin, Brownin ja Cocking (2001) mukaan opettajat tarvitsevat oman ajattelunsa tai henkilökohtaisen tietorakenteensa jäsentämiseen jonkin teoreettisen mallin.

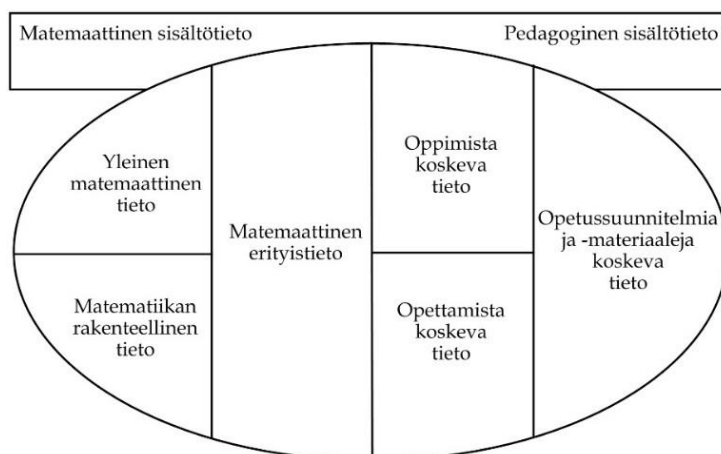
Tässä artikkelissa esittelemme teoreettisia lähtökohtia, joihin perustuen toteutamme opettajaopiskelijoille suunnatun opetusintervention. Opetusinterventiossa pyrimme sitomaan yhteen ongelmalähtöisen ja konstruktivistisen oppimisen. Tämän vuoksi opetuksessa noudatamme tähän tarkoitukseen soveltuvan 5E-mallin (Bybee, Taylor, Gardner, ym., 2006) vaiheita. Opetusintervention sisällöllisenä tavoitteena on opettaa maisterivaiheen opettajaopiskelijoille *Mathe-*

*mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* -opettajantiedon malli (Ball, Thames & Phelps, 2008). Mallin oppiminen tapahtuu siten, että opettajaopiskelijat analysoivat opetustilanteita MKT-mallin avulla. Tällä tavoin opettajaopiskelijat pystyvät tarkastelemaan yhtä aikaa opetustilanteiden taustalla olevaa matemaattista ja pedagogista tietoa. Tavoitteena on auttaa kurssin opiskelijoita ymmärtämään kuinka matemaattinen ja pedagoginen tieto yhdistyvät erilaisissa opetustilanteissa.

## MATEMAATTINEN OPETTAJANTIETO

Deborah Ball ja hänen kollegansa ovat kehittäneet opettajantiedon mallia *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* Michiganin yliopistossa jo yli 25 vuoden ajan (Ball & Bass, 2009). MKT-malli pohjautuu Shulmanin (1986) esittämään malliin, jonka mukaan kaikki opettajat tarvitsevat aineenhallintaa koskevaa tietoa (Subject Matter Knowledge) ja *pedagogista sisältötietoa* (Pedagogical Content Knowledge). Michiganin yliopiston työryhmän tutkimukset osoittavat, että Shulmanin mallia voidaan tarkentaa matematiikan opettamisen suhteen. MKT-mallin mukaan opettajien tarvitsema aineenhallinta eli *matemaattinen sisältötieto* (Subject Matter Knowledge) voidaan jakaa kolmeen osa-alueeseen ja vastaavasti pedagoginen sisältötieto voidaan jakaa kolmeen osa-alueeseen (ks. kuva 1).

MKT-mallissa matemaattisen sisältötiedon hallitseminen ei vaadi pedagogisen sisältötiedon hallintaa, mutta sen sijaan pedagogisen sisältötiedon hallitseminen vaatii matemaattista sisältötietoa (Hill, Ball & Schilling, 2008). Tämä voidaan tulkita siten, että opettajat eivät kykene omaksumaan riittävässä määrin pedagogista sisältötietoa ellei heillä ole riittävää matemaattiseen sisältötietoon liittyvää ymmärrystä.



Kuva 1: Matemaattinen opettajantieto (*Mathematical Knowledge for Teaching, MKT*) sisältää kuusi osa-alueita<sup>1</sup> (Ball, Thames & Phelps, 2008).

<sup>1</sup> Tässä artikkelissa käytetään seuraavia suomennoksia: Yleinen matemaattinen tieto (Common Content Knowledge), Matemaattinen erityistieto (Specialized Content Knowledge), Matematiikan rakenteellinen tieto (Horizon Content Knowledge), Oppimista koskeva tieto (Knowledge of Content).

*Yleinen matemaattinen tieto.* Matematiikanopettajien tulee tuntea opetettava matemaattinen aihe, siihen liittyvät käsitteet, tulokset ja niiden todistukset. Heidän tulee tuntea myös oppikirjojen sisällöt, tunnistaa virheelliset ratkaisut, epätarkat määritelmät ja oppilaiden väärät vastaukset (Ball, ym. 2008). Opettajien tulee osata käyttää matematiikkaa täsmällisesti sekä puhuessaan että kirjoittaessaan. MKT-mallin mukaan muun muassa edellä mainitut seikat vaativat opettajalta yleistä matemaattista tietoa. Yleinen matemaattinen tieto on sellaista matemaattista tietoa, jota tarvitaan matematiikanopettajan työn lisäksi myös muissa matematiikan osaamista hyödyntävissä ammateissa (mm. matemaatikot, insinöörit) (Hill, ym., 2008).

*Matemaattinen erityistieto.* Työssään matematiikanopettajat joutuvat keksimään monenlaisia matemaattisia esimerkkejä ja käyttämään useita erilaisia matemaattisia esitystapoja. Opettajien tulee valikoida opetuksessa käytettävät tehtävät, arvioida millaista aiempaa tietoa niiden ratkaisemiseen tarvitaan ja tarpeen tullen muokata tehtäviä helpommiksi tai vaikeammiksi (Ball, ym. 2008). MKT-mallin mukaan edellä kuvatut seikat vaativat sellaista matemaattista tietoa, mikä on erityistä opettajan työn kannalta. Matemaattista erityistietoa tarvitaan esimerkiksi oppilaan koevastauksia arvioitaessa ja arvostellessa (Ball, ym. 2008). Arviointiperusteiden laatiminen ja ratkaisun pisteyttäminen vaatii sellaista matemaattista tietoa, jota ei tarvita muissa matematiikan osaamista vaativissa ammateissa. Matemaattinen erityistieto ei vaadi tietoa oppimisesta tai oppilaasta (Mosvold, Jakobsen & Jankvist, 2014), sillä esimerkiksi koevastausten arvostelu voidaan tehdä nimettömästi, koska se ei edellytä tietoa koevastauksen tekijästä.

*Matematiikan rakenteellinen tieto.* Matematiikanopettajien tulee tuntea matematiikan rakenne: kuinka käsitteet kytkeytyvät toisiinsa, miten käsitteet muodostavat jonkin matematiikan osa-alueen ja kuinka matematiikan osa-alueet muodostavat kokonaisuuden. Lisäksi opettajien tulee tuntea kuinka matematiikan käsitteet esitetään ja määritellään eri kouluasteilla. Esimerkiksi oppikirjoissa matematiikan käsitteet määritellään eri tavalla eri kouluasteilla ja usein siirryttäessä kouluasteelta toiselle matematiikan käsitteiden määritelmät täsmentyvät ja formalisoituvat. Matematiikan opetus on tehokkaampaa jos opetuksessa otetaan huomioon myös se kuinka matematiikka rakentuu eri kouluasteilla (Ball & Bass, 2009). MKT-mallissa tämän tyyppinen osaaminen vaatii matematiikan rakenteellista tietoa, mikä käsittää sekä matematiikan rakenteeseen että käsitteiden rakentumiseen liittyvän tiedon (Ball, ym. 2008; Ball & Bass, 2009).

*Oppimista koskeva tieto.* Opetusta suunnitellessaan opettaja voi hyödyntää tietoaan yleisistä oppimisteorioista, opetettavaan aiheeseen liittyvistä haasteista ja opettaja voi miettiä keinoja, joilla motivoida oppilaita. Esimerkiksi Pythagoraan lauseen opettaminen motivoivalla ja ongelmalähtöistä oppimista suosivalla tavalla oppilaiden aiheeseen liittyvät virhekäsitykset huomioiden vaatii laajaa

matemaattista ja pedagogista tietämystä oppilaista, oppimisesta ja matematiikasta. MKT-mallin mukaisesti tämän tyyppinen osaaminen edellyttää oppimista koskevaa tietoa. Hillin ym. (2008) mukaan opettajan tulee olla tietoinen siitä kuinka oppilaat ajattelevat ja oppivat eri matematiikan aiheita. Opettaja tarvitsee oppimista koskevaa tietoa myös itse opetustilanteessa, sillä hänen tulee kuunnella ja reagoida oppilaiden puheeseen, vastata heidän esittämiin kysymyksiin ja arvioida oppilaiden matemaattista ajattelua (Petrou & Goulding, 2011).

*Opettamista koskeva tieto.* MKT-mallissa matematiikan oppimista ja opettamista koskevat tiedot nähdään omina osa-alueinaan. Oppituntia suunnitellessaan opettajat miettivät missä järjestyksessä erilaiset toiminnot (opettajien esittämät esimerkit, tehtävien tekeminen, ryhmätyöskentely ym.) suoritetaan (Ball, ym. 2008; Petrou & Goulding, 2011). Opettaja saattaa myös järjestää luokkahuonetta siten, että se mahdollistaa erilaisten ryhmätyöskentelymenetelmien toteuttamisen. Opettaessaan opettajan tulee miettiä myös omaa rooliaan (esim. suoraviivainen tiedonantaja, ohjaava opettaja, keskustelun johtaja) ja päättää mitä tietoa hän antaa oppilaille ja mitä tietoa hän jättää oppilaiden keksittäväksi. Opettaja myös päättää missä tilanteissa alkuperäisestä suunnitelmasta kannattaa poiketa esimerkiksi jonkin oppilaan esittämän asian tai kysymyksen korostamiseksi (Petrou & Goulding, 2011). Opettaja toimii siis ikään kuin luokkahuoneen toimintojen koordinaattorina, joka voi tarpeen vaatiessa tehdä muutoksia omaan rooliinsa ja tuntisuunnitelmaansa. Ballin ym. (2008) mukaan toimet, joita opettajat tekevät parantaakseen oppilaiden oppimista vaativat opettamista koskevaa tietoa.

*Opetussuunnitelmia ja -materiaaleja koskeva tieto.* Matematiikanopettajat tarvitsevat myös tietoa siitä kuinka opetettava aihe kytkeytyy voimassa olevaan opetussuunnitelmaan. Mikäli opetussuunnitelmassa esitetään vaatimuksia oppilaiden osaamiselle, tulee opettajien arvioida kuinka oppilaiden osaamistaso saavutetaan. Opettajat valitsevat ja käyttävät opetuksessa erilaisia oppimateriaaleja (esim. oppikirjat ja muut materiaalit), opetusvälineitä (esim. liitutaulu, piirtoheitin) ja teknologiaa (esim. laskimet, tietokoneet, älytaulut.). Näiden opetuskäyttö vaatii toisaalta käyttötaitoa, mutta toisaalta pedagogista osaamista, sillä opettaja tekee päätöksen kuinka välineitä opetuksessa käytetään. Esimerkiksi tietokoneohjelmistoja hyödynnettäessä opettajan tulee arvioida myös oppilaan käyttötaitoa. Opetusteknologian käyttö vaatii opettajalta teknologian hallitsemisen lisäksi myös matemaattisen ja pedagogisen sisältötiedon hallintaa (Mishra & Koehler, 2009). MKT-mallin mukaan tämän tyyppinen osaaminen kuuluu opetussuunnitelmaa ja oppimateriaaleja koskevaan tietoon (Ball, ym. 2008).

MKT-mallin osa-alueita voidaan kuvailla opettajan toimilla, kuten aiemmin nähtiin, mutta opettajan toimia ei välttämättä voida asettaa vain yhteen osa-alueeseen. Usein esimerkiksi väärän vastauksen tunnistaminen vaatii yleistä matemaattista tietoa, virheen luonteen näkeminen erityistä matemaattista tietoa ja virheen yleisyyden tunnistaminen oppimista koskevaa tietoa (Ball, ym. 2008).

Opetuksen suunnittelu, toteutus ja toteutuneen opetuksen arviointi vaatii usein samanaikaisesti tietoa useista MKT-mallin osa-alueista (Ball, ym. 2008).

Matematiikan opettamiseen tarvittavaa tietoa voidaan kuvata erilaisten opettajantiedon mallien avulla (esim. Ernest, 1989; Fennema & Franke, 1992; Rowland, et al., 2007; Ball, et al., 2008; O'Meara, 2010). Opettajantiedon mallit soveltuvat opettamiseen tarvittavan tiedon luokitteluun, mutta yleensä ne eivät ota kantaa siihen kuinka opetusta tulisi toteuttaa. Tämän vuoksi tarkastelemme seuraavaksi mallia, joka antaa ohjeita opettamiseen myös käytännön tasolla.

## OPPIMISFILOSOFIASTA OPETUSTEORIAKSI: 5E-MALLI

5E-mallin<sup>2</sup> (*The BSCS 5E Instructional Model*) avulla konstruktivistista ja ongelmalähtöistä oppimistapaa voidaan hyödyntää opetuksen suunnittelussa ja toteutuksessa (Bybee, ym., 2006; Bybee, 2009). Vaikka 5E-malli sitoo yhteen sekä ongelmalähtöisen oppimisen että konstruktivistisen oppimisfilosofian ominaisuuksia, on se silti enemmän malli opettamiselle kuin oppimiselle (Boddy, Watson & Aubusson, 2003). 5E-mallissa opetus tapahtuu syklisesti viiden vaiheen kautta. Vaiheet ovat *Kiinnostuminen* (Engagement), *Tutkiminen* (Exploration), *Selittäminen* (Explanation), *Syventäminen* (Elaboration tai Extend) ja *Arvioiminen* (Evaluation). Eräs keskeinen tekijä 5E-mallissa on se, että oppilaat tutkivat opetettavaa aihetta ennen uusien käsitteiden esittämistä. 5E-mallin vaihteita on kuvattu tarkasti kirjallisuudessa (esim. Bybee, ym. 2006; Ronis, 2008; Hanuscin & Lee, 2008). Esitämme mallin vaiheet tiivistetysti Taulukossa 1.

*Taulukko 1: 5E-mallin vaiheet (ks. Bybee, ym. 2006; Ronis, 2008; Hanuscin & Lee, 2008)*

| Vaihe                                          | Lyhyesti                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Kiinnostuminen</i><br>( <i>Engagement</i> ) | Oppilaat tutustuvat tehtäviin tai aktiviteetteihin. Oppilaiden erilaiset ideat tehtävän ratkaisutavoista motivoivat heitä oppimaan. Opettajan tuella toteutettavat aktiviteetit auttavat oppilaita muodostamaan yhteyksiä aiemman ja uuden tiedon välillä.                                                                                                                                                       |
| <i>Tutkiminen</i><br>( <i>Exploration</i> )    | Oppijat työskentelevät ryhmissä pyrkien aktiivisesti ratkomaan annettua tehtävää. Oppilaat testaavat omia hypoteesejaan ja pyrkivät siten keksimään mahdollisimman monta erilaista ratkaisutapaa. Opettaja toimii oppimisen ohjaajana antaen oppilaille riittävästi aikaa pohdiskeluun ja tehtävän ratkaisuun. Opettaja voi tarpeen vaatiessa ohjata oppilaiden työskentelyä esimerkiksi kysymyksiä esittämällä. |
| <i>Selittäminen</i><br>( <i>Explanation</i> )  | Oppilaat kertovat tekemistään havainnoista ja kuvailevat omaa ratkaisutapaansa. Opettaja rohkaisee oppilaita kuvailemaan omin sanoin myös tehtävään liittyviä käsitteitä. Tarpeen vaa-                                                                                                                                                                                                                           |

<sup>2</sup> Mallista käytetään myös nimityksiä kuten *The Five E's* (esim. Boddy, ym., 2003; Bossé, Lee, Swinson & Faulconer, 2010) ja *5E Learning Cycle* (esim. Akar, 2005; Liu, Peng, Wu ym. 2009).

|                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                               | tiessa opettaja voi auttaa oppilaita heidän selityksissään ja formalisoida heidän esittämiään käsitteitä.                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <i>Syventäminen</i><br>( <i>Elaboration</i> ) | Oppilaat soveltavat edellisessä vaiheesta oppimiaan tietoja ja taitoja uusiin, samankaltaisiin tilanteisiin. Opettaja rohkaisee oppilaita käyttämään aiempia kokemuksia, käsitteitä ja niihin liittyvää tietoa uusissa tilanteissa. Oppilaat perustelevat ratkaisutapojaan edellisen vaiheen kokemuksiin nojautuen.                                       |
| <i>Arvioiminen</i><br>( <i>Evaluation</i> )   | Tehtävistä, niiden ratkaisuksista ja niihin liittyvistä käsitteistä keskustellaan opettajajohtoisesti. Oppilaat arvioivat omaa oppimistaan. Myös opettaja pyrkii arvioimaan oppilaiden osaamista ja esittämään sellaisia kysymyksiä, jotka paljastavat oppilaiden todellisen osaamisen. Opettaja puuttuu tarvittaessa myös oppilaiden väärinymmärryksiin. |

5E-mallia on käytetty laaja-alaisesti matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa (Ronis, 2008; Bossé, ym., 2010) ja sen toimivuudesta on tieteellistä näyttöä (Akar, 2005; Liu, ym., 2009; Wilson, Taylor, Kowalski & Carlson, 2010). Vaikka alun perin 5E-malli tarkoitettiin luonnontieteiden opetukseen (Bybee, ym. 2006), sopii se myös esimerkiksi ongelmalähtöisen matematiikan opetuksen toteuttamiseen (Ronis, 2008;). 5E-malli soveltuu matematiikan opetukseen myös siitä syystä, että 5E-mallilla on yhteys NCTM-standardeihin (Bossé, ym., 2010). Toisaalta opettajaopiskelijoilla on esiintynyt vaikeuksia ymmärtää syklisen oppimisen perustuvia lähestymistapoja, jonka vuoksi myös 5E-mallin opettamisessa tuleville opettajille on esiintynyt haasteita (Settlage, 2000).

## TEORiat KÄYTÄNTÖÖN: OPETUSINTERVENTIO

Opetusinterventiossa yhdistämme 5E- ja MKT-mallit uudella tavalla, sillä ensin opettajaopiskelijoille opetetaan *verkkoteoriaa* 5E-mallia soveltaen ja sen jälkeen opettajaopiskelijat analysoivat aiemmin koettua verkkoteorian opetustilannetta MKT-mallin avulla. Verkkoteorian opetuksessa noudatamme 5E-mallin mukaisia vaiheita, jolloin toiveena on, että opetus olisi aktivoivaa, ongelmalähtöistä ja oppijakeskeistä. Analysointivaiheessa MKT-mallia sovelletaan opetuksen analysointiin myöskin uudella tavalla. Muotoilimme opetustilanteisiin liittyviä kysymyksiä kaikkiin MKT-mallin osa-alueisiin liittyen. Näiden kysymysten tarkoituksena on auttaa opettajaopiskelijoita tunnistamaan ja keskustelemaan siitä millaista tietoa opetustilanteiden järjestäminen vaatii opettajalta, ja siten vahvistaa heidän opettajantietoon liittyvää osaamista. Tätä verkkoteorian opetuksen ja analysoinnin sykliä toistetaan useita kertoja opetusintervention aikana.

### Matematiikan opetus 5E-mallin mukaisesti

*Kiinnostuminen.* Opetusinterventiossa uuden asian opetusta ei aloiteta määrittelemällä käsitteitä tai esittelemällä matemaattisia tuloksia vaan opiskelijaryhmät saavat sanallisen ongelmatehtävän ratkaistavakseen. Ongelmatehtävät ovat usein käytäntöön liittyviä, avoimia tai puoliavoimia ongelmia, ja niiden tehtä-



vänannossa käytetään vain harvoin matemaattisia käsitteitä. Ongelmatehtävien käyttämisellä pyritään tukemaan luovan ongelmaratkaisutaidon kehittymistä, sillä ongelmatehtävän alku- ja/tai lopputila ei ole oppijalla aina tiedossa. Matemaattisia käsitteitä käytetään tehtävänannoissa harvoin, sillä näin oppijalle jätetään mahdollisuus määritellä itse tehtävään liittyviä käsitteitä. Toisaalta tehtävänannoissa esiintyvät matemaattiset käsitteet saattavat häiritä myös luovaa ongelmanratkaisua, sillä oppija saattaa yhdistää matemaattiset käsitteet tiettyihin ongelmanratkaisumenetelmiin.

*Tutkiminen.* Opiskelijaryhmien ensimmäisenä konkreettisena tavoitteena on ratkaista ongelma. Opettajan tehtävänä on toimia pikemminkin ohjaajana, ei niinkään opettajana. Ohjaajan roolissa opettaja seuraa opiskelijaryhmien työskentelyä, esittää kysymyksiä ja antaa uusia tehtäviä tai ongelmia opiskelijaryhmien pohdittavaksi ja pyrkii näin johdattamaan opiskelijaryhmiä pohtimaan haluttuja seikkoja. Opettaja ei kuitenkaan anna suoraviivaisia ohjeita itse ongelmaratkaisuun eikä ota kantaa, jos opiskelijat kysyvät onko tehtävä oikein. Tästä minimalististen ohjeiden periaatteesta käytetään kirjallisuudessa myös nimitystä *Minimalist Instruction* (Carroll, 1990). Mikäli opiskelijaryhmät eivät kuitenkaan etene ongelmaratkaisussa, on opettajan mahdollista esittää kysymyksiä ja ohjata siten opiskelijoiden työskentelyä. Tästä ”oikean aikaisesta tuesta” käytetään kirjallisuudessa nimitystä *Scaffolding* (Sawyer, 2006). Näillä toimilla pyritään varmistamaan, etteivät oppijat testaa opettajan antamaa mallia vaan pyrkivät aktiivisesti itse luomaan ratkaisustrategioita ongelmaan.

*Selittäminen.* Ongelman ratkaisemisen jälkeen opettaja johdattaa opiskelijat arvioimaan ongelmanratkaisuprosessia. Tarkoitus on saada opiskelijat analysoimaan ongelman ja heidän ratkaisutavan välistä yhteyttä. Yleensä opettaja johdattaa opiskelijat tarkastelemaan esitettyä ratkaisutapaa kysymällä, mitä ensimmäisen ratkaisuyrityksen jälkeen tapahtui. Usein ratkaisu haasteelliseen ongelmaan ei synny ensimmäisellä yrityksellä. Itseasiassa ongelmatehtävä ei edes täytä ongelmalle asetettuja vaatimuksia, mikäli se voidaan ratkaista nopeasti. Voi olla, että opiskelijaryhmä palaa ongelmanratkaisutavassa taaksepäin, yrittää ratkaista ongelmaa toisella tavalla tai palaa suoraan alkuun ja miettii täysin uutta ratkaisutapaa. Tämän jälkeen opettaja johdattaa opettajaopiskelijat pohtimaan millaiset toimet johtavat oikeaan ratkaisuun. Opettaja rohkaisee opiskelijoita perustelemaan miksi juuri heidän ratkaisutapansa sopii ongelmaan.

*Syventäminen.* Opettaja antaa opiskelijoille uuden tehtävän tai ongelman, joka liittyy keskeisesti edelliseen ongelmaan ja sen ratkaisemiseen. Tämän tehtävän tavoitteena on syventää aiemmin opittua tietoa. Samalla opettaja johdattaa opiskelijat pohtimaan myös edellistä vaihetta tarkemmin, esimerkiksi kuinka uudet käsitteet tulisi sanallisesti määritellä. Tarkoituksena on saada opiskelijat keskustelemaan tehtävien ratkaisusta ja niihin liittyvistä käsitteistä. Opettaja kannustaa opiskelijoita kuvailemaan ja määrittelemään käsitteitä omin sanoin, sillä käyttäen epäformaalia kieltä opettaja pääsee usein lähemmäksi oppilaan matemaattista ajattelua (Joutsenlahti, 2003).

*Arvioiminen.* Lopuksi opettajaohjoisesti keskustellaan kaikkien pienryhmien kesken ongelman ratkaisusta, ongelmaratkaisuprosessista, ongelmaan liittyvistä käsitteistä ja niiden määritelmistä. Opettajaopiskelijat kertovat havainnoistaan, selitysmalleistaan ja heille tarjotaan mahdollisuuksia esittää kysymyksiä myös muiden opiskelijoiden tekemiin havaintoihin liittyen. Tavoitteena on löytää yhteinen näkemys siitä kuinka uudet matematiikan käsitteet tulisi määritellä. Tässä vaiheessa opettaja nostaa aktiivisesti esiin opittuja asioita, tekee yhteenvedoja niistä ja toisaalta korostaa millaisia uusia kysymyksiä ongelmatehtävä nosti esiin.

### **Opetustilanteiden analysointi MKT-mallin avulla**

Analysointivaiheessa opettajaopiskelijat käyttävät MKT-mallia ”teoreettisena linssinä”, jonka läpi he analysoivat aiemmin koettuja 5E-mallin mukaisia opetustilanteita. Analysoinnin avuksi pienryhmät saavat Liitteen 1 mukaisia apukysymyksiä. Nämä apukysymykset käsittelevät kaikkia MKT-mallin osa-alueita ja niiden tarkoituksena on auttaa opettajaopiskelijoita keskustelemaan opettajantietoon liittyvistä seikoista kussakin MKT mallin osa-alueessa ja siten syventää heidän opettajantietoon liittyvää osaamistaan. Muotoilimme Liitteen 1 apukysymykset kirjallisuuden pohjalta (ks. Ball, ym., 2008; Ball, Hill & Bass, 2005; Petrou & Goulding, 2011).

- Esimerkiksi opettamista koskevaa tietoa kuvaillaan seuraavasti: *”Opettaja päättää missä järjestyksessä esimerkit, aktiviteetit ja tehtävät teetetään oppitunnilla”* (Petrou & Goulding, 2011). Muunsimme tämän kysymysmuotoon: *”Missä järjestyksessä opettaja on suunnitellut opetuksen eri vaiheet (esim. tehtävien tekeminen, ryhmätyöskentely, itsenäinen työskentely)?”*
- Vastaavasti oppimista koskevaa tietoa kuvaillaan esimerkiksi seuraavasti: *”Tehtäviä valitessaan opettajan tulee ennustaa millaiset tehtävät kiinnostavat ja motivoivat oppilaita”* (Ball, ym., 2008). Muunsimme tämän kysymysmuotoon: *”Millaiset opetettavaan aiheeseen liittyvät tehtävät kiinnostavat ja motivoivat oppilaita?”*.

Toisinaan opettajan toimia voi olla vaikea asettaa yhteen MKT-mallin osa-alueeseen, sillä esimerkiksi väärän vastauksen tunnistaminen on yleistä matemaattista tietoa kun taas virheen luonteen tunnistaminen on erityistä matemaattista tietoa (Ball, ym., 2008). MKT-mallissa osa-alueiden väliset rajat saattavat tämän vuoksi vaikuttaa hieman epäselviltä (Markworth, Goodwin & Glisson, 2009). Vaikka yksittäisten virheiden tunnistaminen vaatii opettajalta yleistä matemaattista tietoa, on ”kaikkien” virhepolkujen tunteminen enemmän erityistä matemaattista tietoa kuin yleistä matemaattista tietoa (ks. Ball, ym., 2008). Tästä syystä esimerkiksi apukysymys *”Millaisia virheellisiä ratkaisupolkuja tehtäviin liittyy?”* on luokiteltu erityiseksi matemaattiseksi tiedoksi.

Vastaavalla tavalla kaikki muut apukysymykset perustuvat MKT-mallin osa-alueiden kuvauksiin ja määritelmiin. Tulee huomata, että kaikkiin Liitteen 1 apukysymyksiin ei voida vastata yksiselitteisesti. Esimerkiksi opettajaopiskelijat pystyvät kaikin tavoin tunnistamaan erilaisia opetuksen vaiheita kuten tehtävien te-

keminen tai ryhmätyöskentely. Sen sijaan kysymykseen millaiset tehtävät kiinnostavat ja motivoivat oppilaita on hankalaa vastata, sillä se riippuu olennaisesti oppilaista ja heidän mielenkiinnonkohteistaan. Ballin, ym. (2008) mukaan opettajien tulisi kuitenkin miettiä ennen omaa opetusta millaiset tehtävät kiinnostavat ja motivoivat oppilaita. Tämän vuoksi kysymysten esittäminen ja vastausten pohtiminen on yksi keino kehittää opettajantietoa.

## POHDINTAA

Työssä olevien opettajien näkökulmasta opettajankoulutuksessa käsiteltyjen asioiden omaksuminen ja niiden käytäntöön soveltaminen ei ole ongelmaton (ks. Koponen, ym., 2014, 2015). Opettajat voivat kokea tiedon olevan hankalasti käytäntöön soveltuvaa, jos tieto on liian teoreettista tai jos yhteys matemaattisen ja pedagogisen tiedon välillä on vaikeasti nähtävissä (Koponen, ym., 2015). Osa opettajista kokee omaksuneensa opettajankoulutuksessa ylimääräistä tietoa (Koponen, ym., 2015). Varsinainen ongelma saattaa kuitenkin olla siinä, etteivät opettajat osaa soveltaa olemassa olevaa tietämystään riittävän hyvin kouluopetukseen. Opettajat tarvitsevat oman ajattelunsa tai henkilökohtaisen tietorakenteensa jäsentämiseen jonkin teoreettisen mallin tai viitekehyksen. Brown ja Abell (2012) kuvailevat Bransfordin, ym., (2001) *How people learn* -kirjan keskeistä sisältöä näillä sanoilla: ”Kognitiotieteen asiantuntijoiden mukaan ymmärtäminen edellyttää oppilailta uusien asioiden linkittämistä aiempiin kokemuksiin, jotka edelleen tulee voida asettaa teoreettiseen viitekehykseen”. Tämä voidaan tulkita siten, että kyetäkseen ymmärtämään tulee uutta tietoa pystyä myös jäsentämään.

Opetusintervention keskeinen tavoite on MKT-mallin opettaminen opettajaopiskelijoille. Mallin tavoitteena on auttaa opettajaopiskelijoita jäsentämään opettajankoulutuksessa opittua tietoa. Opetusinterventiossa opetustilanteet pilkotaan mallin avulla palasiksi, jolloin opetustilanteita voidaan tarkastella kunkin opettajantiedon osa-alueen näkökulmasta. Näin opettajaopiskelijan olemassa oleva matemaattinen tai pedagoginen tietämys syventyy ja laajentuu, sillä useimmiten opetustilanteita tarkastellaan kaikkien osa-alueiden näkökulmasta. Näin malli ”pakottaa” opettajaopiskelijan pohtimaan samanaikaisesti pedagogista ja matemaattista tietoa, jonka seurauksena opettajaopiskelijoille saattaa muodostua yhtenäisempi käsitys siitä kuinka matemaattinen ja pedagoginen tieto yhdistyvät opetuksessa.

MKT-mallia voidaan käyttää teoreettisena linssinä sekä hyvän että huonon opetuksen tarkasteluun. Tällä tavalla voidaan tehdä arvioita siitä millaista tietoa hyvän tai huonon opetuksen taustalla on. Esiin nousee väistämättä myös se, että onko opetus suunniteltu matemaattisista vai pedagogisista lähtökohdista vai onko suunnittelussa otettu molemmat osa-alueet huomioon.

Opetusintervention aikana opettajaopiskelijoille tarjoutuu mahdollisuus kokea 5E-mallin opetuksen lähestymistapa *oppijan* näkökulmasta. Hanuscin ja Lee (2008) arvelevat, että 5E-mallin kokeminen oppijan roolissa saattaa olla kriittinen seikka pyrittäessä ymmärtämään 5E-mallia. Opetusintervention tarkoituksena on saattaa opettajaopiskelijat pohtimaan, miksi opetusintervention opetus

on erilaista verrattuna perinteiseen luento-opetukseen (*Kiinnostuminen*). Analysointivaiheessa opettajaopiskelijat tutkivat ja erottelevat tarkemmin mitkä tekijät tekevät opetuksesta erilaista (*Tutkiminen*) ja pienryhmätyöskentelyn ansiosta opettajaopiskelijat myös selittävät tekemiään havaintoja muille opiskelijoille (*Selittäminen*). Opetusintervention jälkeen opettajaopiskelijat saattavat päätyä kokeilemaan opittuja asioita esimerkiksi opetusharjoittelussa (*Syventäminen*). Viimeistään työelämässä opettajat luultavasti pohtivat mitkä opettajankoulutuksesta opitut tiedot ovat hyödyllisiä myös kouluopetuksessa (*Arvioiminen*).

Tulevan tutkimuksen avulla saamme lisää tietoa siitä voidaanko tuleville opettajille opettaa MKT-malli opetusintervention avulla ja kuinka mallin omaksuminen laajentaa, syventää tai jäsentää tulevan opettajan tietämystä. Usein ajatellaan, että matematiikan opintojen tarkoituksena on opettaa matematiikan sisältötietoa ja pedagogisten opintojen pedagogista sisältötietoa. Edelleen näiden tietojen yhdistäminen ja käytäntöön soveltaminen tulisi tapahtua opetusharjoittelussa. Tämä on kuitenkin epärealistinen tavoite opetusharjoittelulle (Koponen, ym. 2015). Tästä syystä on tärkeä, että tuleville matematiikanopettajille kehitetään jatkuvasti uusia teoriaan ja tutkimukseen perustuvia opintojaksoja, joista saatavat tulokset auttavat myös opettajankoulutuksen kehittämisessä.

## KIITOKSET

Haluamme kiittää *Suomen kulttuurirahaston Pohjois-Karjalan rahastoa* apurahojen myöntämisestä matemaattisten aineiden opettajankoulutuksen kehittämistä käsittelevän väitöskirjatyön tekemiseen.

## LÄHTEET

- Akar, E. (2005). Effectiveness Of 5e Learning Cycle Model On Students' understanding Of Acid-Base Concepts (Doctoral Dissertation, Middle East Technical University).
- Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany, March 1 – 4, 2009.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?.
- Ball, D., Thames, M.A. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Boddy, N., Watson, K., & Aubusson, P. (2003). A trial of the five Es: A referent model for constructivist teaching and learning. *Research in Science Education*, 33(1), 27-42.

- Bossé, M. J., Lee, T. D., Swinson, M., & Faulconer, J. (2010). The NCTM process standards and the five Es of science: Connecting math and science. *School Science and Mathematics*, 110(5), 262-276.
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2001). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Washington, D.C: National Academy Press.
- Brown, P. L., & Abell, S. K. (2013). Examining the Learning Cycle. *Perspectives: Research & Tips to Support Science Education, K-6*.
- Bybee, R. W. (2009). The BSCS 5E instructional model and 21st century skills. *National Academies Board on Science Education, Washington, DC: Retrieved March, 4, 2011*.
- Bybee, R. W., Taylor, J. A., Gardner, A., Van Scotter, P., Powell, J. C., Westbrook, A., & Landes, N. (2006). The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. *Colorado Springs, CO: BSCS*.
- Carroll, J. M. (1990). *The Nurnberg funnel: designing minimalist instruction for practical computer skill*. Cambridge, MA: MIT press.
- Hanuscin, D. L., & Lee, M. H. (2008). Using the learning cycle as a model for teaching the learning cycle to preservice elementary teachers. *Journal of Elementary Science Education*, 20(2), 51-66.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 372-400.
- Joutsenlahti, J. (2003). Kielentäminen matematiikan opiskelussa. *Teoksessa A. Virta & O. Marttila (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta. Ainedidaktinen symposium* (Vol. 7, No. 2003, pp. 188-196).
- Koponen, M., Asikainen M. A., Viholainen, A. & Hirvonen, P. E. (2015). Teachers and their educators – views on contents and their development needs in mathematics teacher education. Submitted to *The Mathematics Enthusiast* 5.2.2015.
- Koponen, M., Asikainen, M. A., Viholainen, A. & Hirvonen, P. E. (2014). Työssä olevien matematiikanopettajien ja opettajankouluttajien näkemyksiä opettajankoulutuksen opetusmenetelmistä. Teoksessa Røj-Lindberg, A-S., Burman, L., Kurtén-Finnäs, B., & Linnanmäki, K. (Eds.). *Spaces for learning: past, present and future*. Proceedings of the FMSERA 30th annual symposium in Vaasa. Report from the Faculty of Education, Åbo Akademi University, No 36/2014.
- Liu, T. C., Peng, H., Wu, W. H., & Lin, M. S. (2009). The Effects of Mobile Natural-science Learning Based on the 5E Learning Cycle: A Case Study. *Educational Technology & Society*, 12(4), 344-358.
- Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *The Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.

- Mosvold, R., Jakobsen, A., & Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, 23(1), 47-60.
- Petrou, M., & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). Springer Netherlands.
- Ronis, D. L. (2008). *Problem-based learning for math & science: Integrating inquiry and the internet*. Corwin Press.
- Sawyer, R. K. (Ed.). (2006). *The Cambridge handbook of the learning sciences* (Vol. 2, No. 5). New York: Cambridge University Press.
- Settlage, J. (2000). Understanding the learning cycle: Influences on abilities to embrace the approach by preservice elementary school teachers. *Science Education*, 84(1), 43-50.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Wilson, C. D., Taylor, J. A., Kowalski, S. M., & Carlson, J. (2010). The relative effects and equity of inquiry-based and commonplace science teaching on students' knowledge, reasoning, and argumentation. *Journal of Research in Science Teaching*, 47(3), 276-301.

## LIITTEET

| MATEMAATTINEN SISÄLTÖTIETO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | PEDAGOGINEN SISÄLTÖTIETO                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Yleinen matemaattinen tieto</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Mikä oli opetettava aihe?</li> <li>▪ Mitä matemaattisia käsitteitä/tuloksia opetettavaan aiheeseen liittyy?</li> <li>▪ Kuinka opetuksessa käytetyt tehtävät ratkaistaan?</li> <li>▪ Kuinka matemaattiset tulokset (esim. lauseet) todistetaan?</li> <li>▪ Millaisen matemaattisen kielen hallintaa aiheen opettaminen vaatii opettajalta?</li> </ul> | <p><b>Opettamista koskeva tieto</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Missä järjestyksessä opettaja oli suunnitellut opetuksen eri vaiheet (esim. tehtävien tekeminen, ryhmätyöskentely, itsenäinen työskentely)?</li> <li>▪ Poikkesiko opettaja suunnitelmastaan (esim. korostaakseen jotakin asiaa)?</li> <li>▪ Kuinka opettaja järjesti luokkahuoneen?</li> <li>▪ Millaisia esimerkkejä opettaja käytti?</li> <li>▪ Millaista tietoa opettaja "antoi" oppilaille?</li> <li>▪ Millaista tietoa opettaja jätti oppilaiden keksittäväksi?</li> <li>▪ Millaisia ohjeita opettaja antoi oppilailleen?</li> <li>▪ Kuinka opettaja ohjasi työskentelyä tai keskustelua?</li> </ul> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Millaisia yhteenvetoja opettaja teki?</li> <li>▪ Kuinka opettajan toiminta vaikutti oppilaiden oppimiseen?</li> <li>▪ Kuinka opetus olisi ollut tehokkaampaa?</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Matemaattinen erityistieto</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Millaiset esitystavat (esim. kuvallinen, sanallinen, symbolinen) liittyvät opetettaviin käsitteisiin?</li> <li>▪ Millaisia aktiviteetteja / tehtäviä / ongelmia opetuksessa käytettiin?</li> <li>▪ Millaista tietoa / taitoa tehtävien tekeminen vaatii?</li> <li>▪ Millaisia osaamista tehtävät kehittävät (esim. rutiinilaskutaito, ongelmanratkaisua)?</li> <li>▪ Millaisia ratkaisuvaihtoehtoja tehtäviin liittyy?</li> <li>▪ Millaisia virheellisiä ratkaisupolkuja tehtäviin liittyy?</li> <li>▪ Kuinka opetuksessa käytettyjä tehtäviä voidaan muokata vaikeammiksi / helpommiksi?</li> <li>▪ Millaisia muita tehtäviä opetettavaan aiheeseen liittyy?</li> <li>▪ Kuinka opetetun aiheen osaamista voidaan mitata?</li> <li>▪ Millaiset seikat (esim. ratkaisussa) kuvastavat asian osaamista?</li> </ul> | <b>Oppimista koskeva tieto</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Millaisiin oppimisteorioihin opetus nojautui?</li> <li>▪ Millaisia oppimisteorialle ominaisia piirteitä opetuksessa esiintyi?</li> <li>▪ Mitä oppilaat oppivat tai eivät oppineet opetustavoitteisiin verrattuna?</li> <li>▪ Mitkä tekijät paransivat oppimista?</li> <li>▪ Millaisia haasteita oppilailla saattoi olla aiheen oppimisessa?</li> <li>▪ Millaiset aiheeseen liittyvät tehtävät kiinnostavat ja motivoivat oppilaita?</li> <li>▪ Millaisia työskentelymuotoja opetuksessa käytettiin?</li> <li>▪ Kuinka opettaja kuunteli ja reagoi oppilaiden esittämiin kysymyksiin?</li> <li>▪ Kuinka opettaja reagoi oppilaiden työskentelyyn, tehtävien tekemiseen ja oppilaiden väliseen vuorovaikutukseen?</li> <li>▪ Millaista vuorovaikutusta oppilaiden välillä esiintyi?</li> <li>▪ Kuinka vuorovaikutus vaikutti oppimiseen?</li> </ul> |
| <b>Matematiikan rakenteellinen tieto</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Kuinka uusi opetettava käsite liittyy muihin matematiikan käsitteisiin?</li> <li>▪ Mihin laajempaan matematiikan osa-alueeseen uusi käsite kuuluu?</li> <li>▪ Kuinka matematiikan osa-alueet ovat yhteydessä toisiinsa?</li> <li>▪ Kuinka opetettava käsite ja siihen liittyvät käsitteet on esitetty aiemmillä / tulevilla kouluasteilla?</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>Opetussuunnitelmia ja -materiaaleja koskeva tieto</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Millaisia vaatimuksia opetettavalle aiheelle esitetään opetussuunnitelmassa?</li> <li>▪ Millaista opetusmateriaaleja, -välineitä tai teknologiaa opetuksessa käytettiin?</li> <li>▪ Mitä etuja / haasteita niiden käyttöön liittyy?</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |





# LÄMPÖOPIN TOINEN PÄÄSÄÄNTÖ - MAKRO- JA MIKROSELITYSTEN JOHDONMUKAISUUS YLIOPISTOSSA

Risto Leinonen, Mervi A. Asikainen & Pekka E. Hirvonen

Itä-Suomen yliopisto

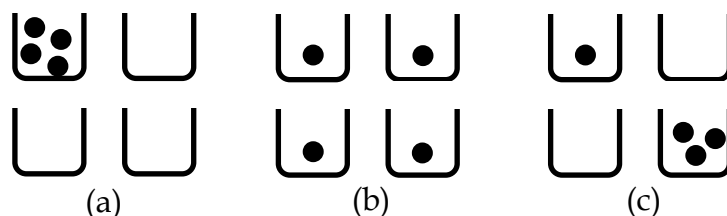
*Tutkimuksessa tarkastellaan yliopisto-opiskelijoiden käyttämien makro- ja mikroselitysten johdonmukaisuutta opiskelijoiden soveltaessa lämpöopin toista pääsääntöä lämmönsiirtymisprosesseihin. Aineisto (N=48) kerättiin kyselylomakkeella aineopintotasoisella Termofysiikan kurssilla. Testissä kysyttiin entropian ja mikrotilojen lukumäärän muutosta kahden olion muodostamalle systeemille. Tulokset paljastivat, että 42 % opiskelijoista osasi soveltaa lämpöopin toista pääsääntöä täsmällisesti sekä mikro- että makrotasolla. Opiskelijoista 26 % käytti johdonmukaisesti virheellistä ideaa entropian säilymisestä molemmilla tasoilla. Epäjohdonmukaisuutta havaittiin, kun 17 % opiskelijoista ajatteli entropian kasvavan mutta mikrotilojen lukumäärän säilyvän vakiona prosessin aikana.*

## JOHDANTO

Lämpöopin toinen pääsääntö on eräs tunnetuimpia fysiikan periaatteita. Tässä tutkimuksessa tarkastellaan, kuinka johdonmukaisesti opiskelijat soveltavat toista pääsääntöä mikro- ja makrotasolla.

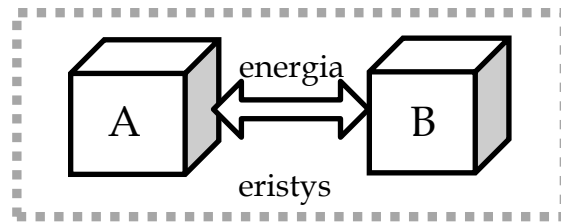
### Lämpöopin toinen pääsääntö

Einsteinin kiinteän aineen mallin mukaan kappale koostuu atomeista, joista kutakin vastaa kolme värähtelijää, jotka voivat sitoa itseensä energiayksiköitä. Energiayksiköiden lukumäärä määrittää kappaleen makrotilan. Yhtä makrotilaa voi vastata useampi mikrotila, mitä havainnollistaa Kuva 1, jossa värähtelijöitä kuvataan laatikoilla ja energiayksiköitä näihin sijoitettavilla palloilla. Tiettyä makrotilaa vastaavien mikrotilojen lukumäärää kutsutaan multiplisiteetiksi (Schroeder, 2000).



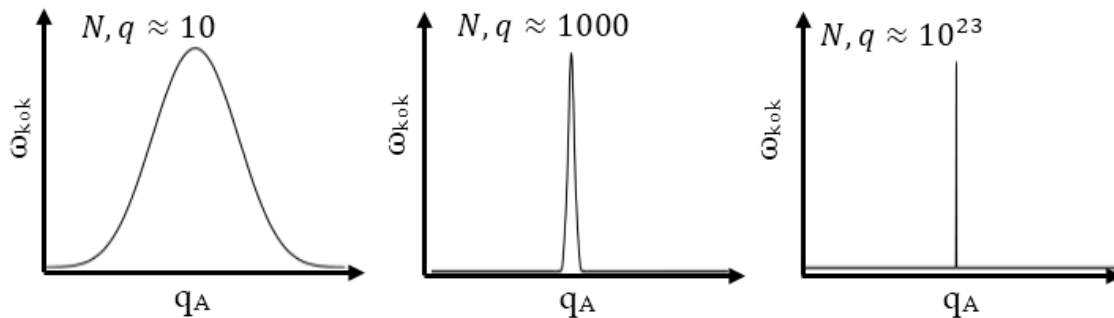
*Kuva 1: Kolme erilaista mikrotilaa (a-c) neljän värähtelijän systeemille, jonka makrotilan määrittää värähtelijöiden jakamat neljä energiayksikköä. Kaikkiaan tälle systeemille on olemassa 35 erilaista mikrotilaa.*

Laajennetaan tarkastelu kahteen kappaleeseen A ja B, jotka voivat vaihtaa energiayksiköitä keskenään (kuva 2).



Kuva 2: Kappaleet A ja B voivat vaihtaa energiayksiköitä keskenään vapaasti, mutta energiayksiköt eivät voi poistua systeemin ulkopuolelle.

Koko systeemin multiplisiteetti saadaan yksittäisten kappaleiden multiplisiteettien tulona. Kuva 3 havainnollistaa, kuinka kokonaismultiplisiteetin kuvaaja muuttuu kappaleen A energiayksiköiden lukumäärän funktiona systeemin koon kasvaessa (Schroeder, 2000).



Kuva 3: Kahden kappaleen A ja B kokonaismultiplisiteetti  $\omega_{\text{kok}}$  kappaleessa A olevien energiayksiköiden lukumäärän  $q_A$  funktiona värähtelijöiden lukumäärän  $N$  ja energiayksiköiden lukumäärän  $q$  kasvaessa.

Multiplisiteetti on suoraan verrannollinen todennäköisyyteen. Kun tarkastellaan suuria systeemejä, jotka jakavat keskenään energiayksiköitä, tietyn makrotilan tai tiettyjen makrotilojen multiplisiteetit saavat muita tiloja suuremman arvon. Mahdolliset poikkeamat tästä tilasta ovat mittatarkkuuden ulottumattomissa. Tämä johtaa yhteen lämpöopin toisen pääsäännön muodoista: riittävän suuri systeemi päättyy makrotilaan, jolla on suurin multiplisiteetti. (Schroeder, 2000)

Usein toinen pääsääntö esitetään entropian avulla multiplisiteetin sijaan. Multiplisiteetin  $\omega$  ja entropian  $S$  välinen yhteys kirjoitetaan  $S = k \ln \omega$ , missä  $k$  on Boltzmannin vakio. Tällöin toinen pääsääntö voidaan kirjoittaa: suljetun systeemin entropia kasvaa spontaaneissa prosesseissa (Schroeder, 2000).

Toisen pääsäännön seurauksena systeemeillä on taipumus hakeutua kohti tasapainotilaa. Edellisessä esimerkissä energiayksiköt voivat siirtyä kappaleiden välillä vapaasti, ja systeemi päättyy tilaan, jossa kappaleilla on sama lämpötila.

## Aiempi tutkimus oppimisen ongelmista

Lämpöopin toisen pääsäännön soveltaminen ei ole ongelmatonta. Usein entropiaan viitataan epäjärjestyksenä, mikä ei ole täsmällistä. Monesti opiskelijat rinnastavat epäjärjestyksen kaaokseen tai makroskooppiseen epäjärjestykseen (Carson & Watson, 2002; Ribeiro, 1992; Sözbilir & Bennett, 2007).

Toinen tyypillinen ongelma on opiskelijoiden taipumus ymmärtää entropia säilyvänä suureena. Ajatuksen takana voi piillä entropian rinnastaminen energiaan, lämpöön, entalpiaan tai hiukkasten kineettiseen energiaan (Carson & Watson, 2002; Christensen, Meltzer, & Ogilvie, 2009; Ribeiro, 1992; Sözbilir & Bennett, 2007).

Kolmas ongelma on opiskelijoiden taipumus ymmärtää yksittäisten olioiden entropian kasvavan kaikissa prosesseissa. Tämä liittyy osaltaan oppikirjoissa esitettyihin toisen pääsäännön muotoihin, joissa entropian todetaan kasvavan nostamatta tämän toteamuksen rajoituksia selvästi esille (Christensen ym., 2009; Ribeiro, 1992; Thomas & Schwenz, 1998).

Systeemin, ympäristön, maailmankaikkeuden ja lämpötasapainon puutteellinen ymmärtäminen aiheuttaa ongelmia toista pääsääntöä sovellettaessa (Carson & Watson, 2002; Christensen ym., 2009; Kesidou & Duit, 1993). Myös ensimmäisen pääsäännön puutteellinen ymmärtäminen vaikuttaa toisen pääsäännön soveltamiseen (Cochran & Heron, 2006; Sözbilir & Bennett, 2007).

## Tutkimuskysymys ja johdonmukaisuus

Opiskelijoiden ongelmia lämpöopin toista pääsääntöä sovellettaessa on dokumentoitu makroskooppisella ja mikroskooppisella tasolla, mutta näiden tasojen yhteyttä ei ole juuri tarkasteltu toisen pääsäännön yhteydessä. Tämän artikkelin tutkimuskysymykseksi on muotoiltu:

*Kuinka johdonmukaisesti opiskelijat käyttävät lämpöopin toista pääsääntöä makro- ja mikrotasoilla lämmönsiirtymisprosessissa kahden olion muodostamalle systeemille?*

Tässä artikkelissa johdonmukaisuus viittaa siihen, että käyttävätkö opiskelijat samaa fysiikan ideaa vastauksissaan makro- ja mikrotason tehtäviin. Jos opiskelija käyttää samaa ideaa molemmilla tasoilla, hänen vastauksensa ovat johdonmukaisia. Tämä ei vaadi opiskelijoiden ideoiden olevan fysiikan kannalta täsmällisiä, vaan myös virheellisiä ideoita voidaan käyttää johdonmukaisesti.

Opiskelijoiden vastausten johdonmukaisuutta on tutkittu aiemmin useissa fysiikan aiheissa, kuten voimat, liike, aallot, paine, tiheys ja lämpötila (Clough & Driver, 1986; Finegold & Gorsky, 1991; Leinonen, Räsänen, Asikainen, & Hirvonen, 2009; Palmer, 1993; Tongchai, Sharma, Johnston, Arayathanikul, & Soankwan, 2011). Johdonmukaisuutta on tutkittu myös eri esitystapojen välillä (Nieminen, Savinainen, & Viiri, 2012). Tutkimuksia yhdistää se, että opiskelijat

voivat käyttää fysiikan periaatteita epäjohdonmukaisesti kontekstien ja esitystapojen muuttuessa.

## **MENETELMÄT**

Tässä luvussa kuvataan kurssikonteksti ja esitellään aineistonkeruumenetelmät testikysymyksineen. Luvun päättää lyhyt kuvaus aineistonanalyysistä.

### **Kurssi ja kohdejoukko**

Aineisto kerättiin Itä-Suomen yliopiston Fysiikan ja matematiikan laitoksella järjestettävällä aineopintotasoisella Termofysiikan kurssilla vuosina 2013 ja 2014. Kurssin sisällöt, opettajat ja toteutus pysyivät samoina molempina vuosina, joten näinä vuosina kerättyä aineistoa ei eritellä analyysissämme.

Kurssi on varsin tyypillinen luento- ja harjoituskurssi. Viikoittain pidetään kaksi kahden luentotunnin kokonaisuutta, ja kaikkiaan kurssilla on 30 luentotuntia. Luennot ja niillä käytettävä PowerPoint-runko pohjautuvat oppikirjaan *Introduction to thermal physics* (Schroeder, 2000). Luennoilla käydään läpi luentorunkoa, jota täydennetään lukuisilla esimerkeillä. Noin puolet opiskelijoista käy luennoilla säännöllisesti.

Harjoituksissa (7×2 h) käydään läpi kotitehtäviä. Tarkoituksena on antaa opiskelijoille mahdollisuus esittää aiemmin valmistelemansa ratkaisut muille opiskelijoille. Paikalla oleva laskuharjoitusassistentti kommentoi, täydentää ja korjaa tarvittaessa opiskelijoiden tekemiä ratkaisuja. Laskuharjoitusten tekemisestä palkitaan muutamalla lisäpisteellä kurssiarvioinnissa. Tyypillisesti osallistumisaktiivisuus laskuharjoituksissa on hieman luentoja korkeampi.

### **Aineistonkeruu**

Aineistoa kerättiin 48 opiskelijalta, joilla oli pääaineinaan matematiikka, fysiikka, kemia tai tietojenkäsittelytiede. Aineisto kerättiin luennolla sen jälkeen, kun testissä vaadittavat asiat oli käsitelty luennoilla ja laskuharjoituksissa.

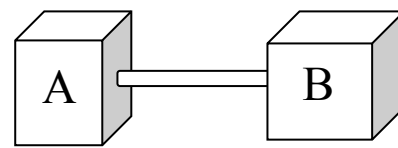
Aineisto kerättiin kyselylomakkeella, joka pohjautui osin aiemmin julkaistuihin testitehtäviin. Kyselyn ensimmäinen osa tehtävistä keskittyi toiseen pääsääntöön makroskooppisella tasolla (Christensen ym., 2009) ja jälkimmäinen mikroskooppisella tasolla. Molemmissa tehtävissä tarkasteltiin lämmönsiirtymistä kahden olion välillä niiden ollessa alkutilanteessa eri lämpötiloissa (kuva 4). Kontekstia muutettiin hieman tehtävien välillä, jotta tehtävien välinen yhteys ei olisi opiskelijoille liian ilmeinen.

Alun perin molemmat testitehtävät sisälsivät neljä alakysymystä (a-d). Tässä artikkelissa tarkastellaan opiskelijoiden antamia vastauksia kysymyksiin, joissa tarkastellaan entropian (1c) tai mikrotilojen lukumäärän (2c) muutoksia kahden olion muodostamalle systeemille.

Kappale on termisesti eristetyssä huoneessa, jossa on ilmaa. Alkutilanteessa kappale ja huoneen ilma ovat eri lämpötiloissa. Tarkastelujakson aikana energiaa voi siirtyä kappaleen ja ilman välillä, mutta energianvaihtoa ei tapahdu ilman ja muun maailman eikä ilman ja eristävien seinien välillä.

1c. Mitä kappaleen ja huoneessa olevan ilman yhteenlasketulle entropialle  $[S_{\text{kappale}} + S_{\text{ilma}}]$  tapahtuu prosessin aikana: *kasvaa, pienenee, pysyy samana* vai *ei voida määrittää*? **Perustele vastauksesi.**

Kaksi kappaletta A ja B ovat termisesti eristetyssä astiassa, ja niitä yhdistää toisiinsa ohut metallitanko. Lämpöenergiaa siirtyy spontaanisti kappaleesta A kappaleeseen B. Mitä prosessin aikana tapahtuu mahdollisten mikrotilojen lukumäärille (*suurenee, pienenee* vai *pysyy samana*) seuraavassa tapauksessa? Perustele vastauksesi ja viittaa entropiaan tarvittaessa.



2c. Kappaleiden A ja B muodostaman systeemin mikrotilojen lukumäärä

(a)

(b)

*Kuva 4: Käytetyt testitehtävät. 4a keskittyy toisen pääsäännön makroskooppiseen (Christensen ym., 2009) ja 4b mikroskooppiseen tulkintaan.*

Opiskelijoille annettiin testiin tarvittava määrä aikaa, ja vastattuaan tehtäviin opiskelijat saivat poistua luentosalista. Tyypillisesti opiskelijat tarvitsivat testin tekemiseen noin 15 minuuttia.

### Aineiston analyysi

Tehtäviemme tarkoituksena oli tarkastella opiskelijoiden vastauksien johdonmukaisuutta makro- ja mikrotasojen välillä. Tämän mahdollistamiseksi selvitetiin ensin opiskelijoiden vastauksia eri tasoilla yhdistävät piirteet.

Opiskelijoiden vastaukset luokiteltiin sisällönanalyysin periaatteita noudattaen. Analyysi lähti liikkeelle aineistosta, mutta tutkijan perehtyneisyys aiempiin tutkimuksiin ohjasi luokkien muodostumista, joten käytännössä prosessi oli yhdistelmä teoria- ja aineistolähtöistä analyysiä (Elo & Kyngäs, 2008).

Aluksi opiskelijoiden vastauksista haettiin yhtäläisyyksiä ja eroavaisuuksia, ja näiden pohjalta muodostettiin luokat vastauksille. Luokat täsmentyivät vastauksia lukiessa, jolloin kaikki vastaukset analysoitiin uudelleen. Lopputuloksena muodostuneet luokat ovat hyvin yksiselitteisiä ja eksklusiivisia.

Kun opiskelijoiden vastaukset makro- ja mikrotason tehtäviin oli luokiteltu erikseen, muodostuneista luokista etsittiin yhtäläisyyksiä tasojen välillä. Pro-

sessin aikana luokkia yhdisteltiin ja poistettiin siten, että lopputulokseksi saatiin järjestelmä, joka toimii opiskelijoiden vastauksille mikro- ja makrotason tehtäviin. Tämän jälkeen opiskelijoiden vastaukset tehtäviin ristiintaulukoitiin, jolloin voitiin tarkastella johdonmukaisuutta heidän vastaustensa välillä.

## TULOKSET

Tässä luvussa esitellään aluksi yksittäin makro- ja mikrotason tehtävistä nousevat opiskelijoiden käyttämät ideat. Tämän jälkeen tarkastellaan näiden ideoiden käytön johdonmukaisuutta makro- ja mikrotasojen välillä.

### Makroskooppinen taso

Toisen pääsäännön osaamista testattiin kuvan 4a mukaisella tehtävällä. Opiskelijoiden vastausjakauma ja esimerkkiperusteluita nähdään taulukosta 1.

*Taulukko 1: Opiskelijoiden vastausjakauma makroskooppista toisen pääsäännön ymmärtämistä testaavaan tehtävään. Oikea vastaus ja niiden osuus on taulukossa lihavoituna ja kursivoituna. Kolmannessa sarakkeessa nähdään opiskelijoiden esimerkkiperusteluita. N=48.*

| Kappaleen ja ilman yhteenslaskettu entropia | Opiskelijoiden vastausten osuus | Esimerkkiperustelut <sup>3</sup>                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>kasvaa</i>                               | <b>63 %</b>                     | <i>Kasvaa, koska kyseessä on eristetty systeemi.<br/>Systeemi saavuttaa tasapaino-lämpötilan <math>T</math>. <math>\Delta S_k + \Delta S_i &gt; 0</math>, joten entropia kasvaa.</i> |
| pienenee                                    | 0 %                             | -                                                                                                                                                                                    |
| pysyy samana                                | 29 %                            | <i>Entropia pysyy samana, koska energianvaihtoa ei tapahdu muiden osapuolten välillä.<br/>Pysyy samana. Toinen kasvaa, toinen pienenee.</i>                                          |
| Sen muutosta ei voida määrittää             | 4 %                             | <i>Yhteenslaskettua entropiaa ei voida määrittää sillä kappaleen ja ilman lämpötilaa ei tiedetä.</i>                                                                                 |
| Tyhjät                                      | 4 %                             | -                                                                                                                                                                                    |

Taulukosta 1 havaitaan, että 63 % opiskelijoista vastasi kysymykseen oikein; 56 % perusteli vastauksensa hyväksyttävästi taulukon 1 mukaisilla perusteluilla.

<sup>3</sup> Esimerkkiperustelut havainnollistavat tekstissä esiteltyjä perustelutyyppejä.

Loput näistä opiskelijoista jättivät tehtävän perustelematta. 29 % opiskelijoista väitti kappaleen ja ilman yhteenlasketun entropian pysyvän samana prosessin aikana. Noin puolet heistä perusteli vastauksensa sillä, että systeemin ja ympäristön välillä ei siirry energiaa. Kolmannes heistä turvautui kompensatioargumenttiin ja kirjoitti muutosten olevan yhtä suuret.

### Mikroskooppinen taso

Toisen pääsäännön soveltamista mikroskooppisella tasolla testattiin kuvan 4b tehtävällä. Tehtävänannossa tarjottiin mahdolliset vastausvaihtoehdot<sup>4</sup>, joiden välille opiskelijoiden vastaukset jakaantuivat. Jakauma ja opiskelijoiden esimerkkiperusteluita nähdään taulukosta 2.

*Taulukko 2: Opiskelijoiden vastausjakauma mikroskooppista toisen pääsäännön ymmärtämistä testaavaan tehtävään. Oikea vastaus ja niiden osuus on taulukossa lihavoituna ja kursiivilla. Kolmannessa sarakkeessa nähdään opiskelijoiden esimerkkiperusteluita. N=48.*

| <b>Kappaleiden A ja B muodostaman systeemin mikrotilojen lukumäärä</b> | <b>Opiskelijoiden vastausten osuus</b> | <b>Esimerkkiperustelut</b>                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>kasvaa</i>                                                          | <b>44 %</b>                            | <i>Kasvaa, koska systeemi pyrkii tilaan, jossa multiplisiteetti on mahd. suuri<br/>Niitä on enemmän, koska mitä enemmän kappaleessa B on mahdollisuuksia jakaantua, kappaleen A tilojen lukumäärä ei kuitenkaan vähene samassa suhteessa.</i> |
| pienenee                                                               | 0 %                                    | -                                                                                                                                                                                                                                             |
| pysyy samana                                                           | 48 %                                   | <i>Pysyy vakiona, koska eristetyssä systeemissä A:sta lähtee yhtä paljon kuin B:n lisääntyä.<br/>Pysyy samana, sillä entropia ei muutu systeemissä.</i>                                                                                       |
| Tyhjä                                                                  | 8 %                                    | -                                                                                                                                                                                                                                             |

44 % opiskelijoista vastasi tarkasteltavan systeemin mikrotilojen lukumäärän kasvavan energiayksiköiden siirtyessä kappaleesta A kappaleeseen B. Nämä opiskelijat perustelivat vastauksensa kahta tyhjää vastausta lukuun ottamatta

<sup>4</sup> Mikrotason tehtävässä kappaleiden lämpötilat voitiin määrittää, ja tästä syystä vaihtoehtoa "Sen muutosta ei voida määrittää" ei esitetä vaihtoehtona.

hyväksyttävästi. 48 % opiskelijoista vastasi systeemin mikrotilojen lukumäärän säilyvän vakiona. Heidän perusteluistaan havaittiin seuraavanlaisia ajatuksia:

- Kappaleen A mikrotilojen lukumäärän muutos vastaa kappaleen B mikrotilojen lukumäärän muutosta. (13 %)
- Kappaleiden ei ymmärretä olevan osa maailmankaikkeutta. (6 %)
- Viitataan entropian ja mikrotilojen lukumäärän yhteyteen<sup>5</sup>. (6 %)

### Johdonmukaisuus

Makro- ja mikrotason tehtävien luokkien pohjalta muodostettiin sekä makro- että mikrotasolla toimiva luokittelujärjestelmä. Opiskelijoiden vastaukset tehtäviin luokiteltiin siten, että päästiin tarkastelemaan heidän käyttämiensä ideoiden johdonmukaisuutta tasojen välillä. Luokittelu nähdään taulukossa 3.

*Taulukko 3: Opiskelijoiden luokitellut vastaukset makro- ja mikrotason tehtäviin. Rivien ja sarakkeiden luokat ovat samat. Johdonmukaisten vastausten osuudet esitetään lihavoituna. N=48.*

| Opiskelijoiden perustelut |                                                                                                       | Makrotaso   |            |            |            |     |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|------------|------------|-----|
|                           |                                                                                                       | 1           | 2          | 3          | 4          | 5   |
| Mikrotaso                 | 1. Hyväksyttävät perustelut                                                                           | <b>42 %</b> | 2 %        | 0 %        | 0 %        | 0 % |
|                           | 2. Entropia/Mikrotilojen lukumäärä ei muutu, koska yksittäisten olioiden muutokset vastaavat toisiaan | 4 %         | <b>0 %</b> | 2 %        | 0 %        | 2 % |
|                           | 3. Entropia/Mikrotilojen lukumäärä ei muutu, koska systeemi on eristetty                              | 0 %         | 0 %        | <b>0 %</b> | 6 %        | 0 % |
|                           | 4. Entropian/Mikrotilojen lukumäärä ei muutu (ei perustelua)                                          | 13 %        | 6 %        | 8 %        | <b>4 %</b> | 4 % |
|                           | 5. Tyhjät ja luokittelemattomat                                                                       | 4 %         | 0 %        | 0 %        | 0 %        | 2 % |

42 % opiskelijoista vastasi tehtävään hyväksyttävästi makro- ja mikrotasoilla. Hyväksyttäviksi vastauksiksi laskettiin vastaukset, joissa saavutettiin oikea lopputulos, eikä perusteluissa ollut virheitä. Luokat 2-4 liittyvät vastauksiin, joissa opiskelijat ajattelivat entropian/mikrotilojen lukumäärän pysyvän vakiona. Kaikkiaan 26 % opiskelijoista kuuluu näiden luokkien yhdistelmiin makro- ja mikrotasoilla, mutta perusteluissa on eroja. Yksikään opiskelija ei käyttänyt vastaavia perusteluita makro- ja mikrotasoilla, mutta tätä ei tulkita epäjohdonmukaisuudeksi, koska luokat 2-4 eivät ole ristiriitaisia keskenään.

17 % opiskelijoista tunnisti entropian kasvavan, mutta väitti mikrotilojen lukumäärän pysyvän vakiona. Osa heistä perusteli mikrotilojen lukumäärän muuttumattomana säilymisen kompensatioargumentilla. Yksi opiskelija väitti

<sup>5</sup> Perusteluna tämä on hyväksyttävä, mutta vedetty johtopäätös on virheellinen.



mikrotilojen lukumäärän kasvavan ja entropian pysyvän vakiona. Nämä tulokset osoittavat, että osa opiskelijoista käyttää toista pääsääntöä epäjohdonmukaisesti, ja makroskooppinen tulkinta osataan mikroskooppista paremmin.

## POHDINTA

Tuloksiamme ei voida tiivistää yksikäsitteiseksi vastaukseksi tutkimuskysymykseemme ”Kuinka johdonmukaisesti opiskelijat käyttävät lämpöopin toista pääsääntöä makro- ja mikrotasoilla lämmönsiirtymisprosessissa kahden olion muodostamalle systeemille?” Iso osa opiskelijoista käytti fysiikan periaatteita johdonmukaisesti vastauksissaan, mutta myös epäjohdonmukaisuuksia havaittiin. Tyypillisin epäjohdonmukaisuus havaittiin opiskelijoiden soveltaessa toista pääsääntöä täsmällisesti makrotasolla, vaikka he väittivät mikrotilojen lukumäärän olevan säilyvä suure. Näiden huomioiden pohjalta todetaan opiskelijoiden toisen pääsäännön soveltamisen voivan olla epäjohdonmukaista, vaikka tarkasteltavat tilanteet ovat fysikaalisesti hyvin lähellä toisiaan.

Tuloksiemme yksityiskohtainen vertaaminen aiempiin tutkimuksiin ei ole mielekästä, koska kontekstimme ja menetelmämme poikkeavat muista tutkimuksista. Yleisesti havaitsemamme epäjohdonmukaisuudet tukevat aiempien tutkimusten havaintoja (Clough & Driver, 1986; Finegold & Gorsky, 1991; Palmer, 1993; Tongchai ym., 2011), vaikkakin tässä tutkimuksessa epäjohdonmukaisia perusteluita esittäneiden opiskelijoiden osuus on pienempi kuin aiemmissa tutkimuksissa.

Vaikuttaa siltä, että aiheen ymmärtäminen makroskooppisella tasolla on edellytys aiheen ymmärtämiselle mikroskooppisella tasolla, mutta se ei kuitenkaan takaa tätä. Tätä tulisi tutkia lisää, sillä näin voitaisiin saada tietoa näiden tasojen merkityksestä oppimiselle. Samoin voitaisiin selvittää opiskelijoiden vastausten taustalla olevaa ajattelua teemahaastatteluiden avulla. Olisi myös mielenkiintoista tietää, että kuinka lähellä tehtävien täytyy olla toisiaan, että opiskelijoiden vastaukset pysyvät johdonmukaisina.

Yhteys makro- ja mikrotasojen välillä ei näyttäydy opiskelijalle samoin kuin opettajalle, ja tämä tulisi huomioida opetuksessa. Suosittelemme opettajia käyttämään tehtäviä, joissa makro- ja mikrotason tarkastelut ovat rinnakkain mukana. Opiskelijoita voidaan myös haastaa hakemaan ristiriitoja omista vastauksistaan, sillä tämä on keskeinen taito tavoiteltaessa johdonmukaisuutta. Tämän taidon kehittämiseksi voidaan laatia erityisiä tehtäviä, sillä tämä taito ei välttämättä kehity itsestään. Toivomme oppikirjojen laatijoiden huomioivan tämän kehitystyössään.

## LÄHTEET

Carson, E. M., & Watson, J. R. (2002). Undergraduate students' understandings of entropy and gibbs free energy. *U. Chem. Ed.*, 6, 4-12.

- Christensen, W. M., Meltzer, D. E. & Ogilvie, C. A. (2009). Student ideas regarding entropy and the second law of thermodynamics in an introductory physics course. *Am. J. Phys.*, 77(10), 907-917.
- Clough, E. E., & Driver, R. (1986). A study of consistency in the use of students' conceptual frameworks across different task contexts. *Sci. Educ.*, 70(4), 473-496.
- Cochran, M. J., & Heron, P. R. (2006). Development and assessment of research-based tutorials on heat engines and the second law of thermodynamics. *Am. J. Phys.*, 74(8), 734-741.
- Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *J. Adv. Nurs.*, 62(1), 107-115.
- Finegold, M., & Gorsky, P. (1991). Students' concepts of force as applied to related physical systems: A search for consistency. *Int. J. Sci. Educ.*, 13(1), 97-113.
- Kesidou, S. & Duit, R. (1993). Students' conceptions of the second law of thermodynamics - An interpretive study. *J. Res. Sci. Teach.* 30(1), 85-106.
- Leinonen, R., Räsänen, E., Asikainen, M. A., & Hirvonen, P. E. (2009). Students' pre-knowledge as a guideline in the teaching of introductory thermal physics at university. *Eur. J. Phys.*, 30, 593-604.
- Nieminen, P., Savinainen, A., & Viiri, J. (2012). Relations between representational consistency, conceptual understanding of the force concept, and scientific reasoning. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, 8(1), 010123.
- Palmer, D. (1993). How consistently do students use their alternative conceptions? *Res. Sci. Ed.*, 23(1), 228-235.
- Ribeiro, G. T. (1992). Entropy and the second principle of thermodynamics—Fourth year undergraduates' ideas. *Research in Assessment*, IX, 23-36.
- Schroeder, D. V. (2000). *An introduction to thermal physics*. SF: Addison Wesley.
- Styer, D. F. (2000). Insight into entropy. *Am. J. Phys.*, 68(12), 1090-1096.
- Sözbilir, M. & Bennett, J. M. (2007). A study of Turkish chemistry undergraduates' understandings of entropy. *J. Chem. Educ.*, 84(7), 1204-1208.
- Thomas, P. L. & Schwenz, R. W. (1998). College physical chemistry students' conceptions of equilibrium and fundamental thermodynamics. *J. Res. Sci. Teach.*, 35(10), 1151-1160.
- Tongchai, A., Sharma, M. D., Johnston, I. D., Arayathanitkul, K., & Soankwan, C. (2011). Consistency of students' conceptions of wave propagation: Findings from a conceptual survey in mechanical waves. *Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res.*, 7(2), 020101.

## ONGELMAKENTÄT KEINONA EDISTÄÄ OPPILAIDEN MATEMAATTISTA YMMÄRRYSTÄ PERUSKOULUSSA

Erkki Pehkonen

Helsingin yliopisto

*Tämä esitys keskittyy tiettyyn menetelmään kehittää matemaattista ymmärtämistä peruskoulussa: ongelmakenttien käyttämiseen matematiikan opetuksessa. Ongelmakentät ovat avoimia ongelmia, joiden käyttäminen on saanut yhä enemmän painotusta kaikkialla maailmassa. Kun ongelmakenttiä käytetään sopivalla tavalla, opettaja voi niiden avulla parantaa matematiikanopetustaan koulussa. Esityksessä tarkastellaan termejä 'avoin ongelma' ja 'ongelmakenttä'; näitä käsitteitä valaistaan esimerkillä. Lisäksi käydään läpi yksi esimerkki ongelmakentästä opetustodellisuuden tasolla.*

Matematiikan opetuksen tärkeä tavoite on kaikkien ikäluokkien kohdalla edistää matemaattisten rakenteiden ymmärtämistä ja matemaattisen ajattelun kehittämistä (vrt. OPH 2004). Myös uusi opetussuunnitelma (OPH 2014) korostaa, että matematiikan opetuksen tehtävä on kehittää oppilaiden matemaattista ajattelua, luoda pohja matemaattisten käsitteiden ja konstruktioiden ymmärtämiselle, jotka antavat oppilaille resursseja käsitellä informaatiota ja ratkaista ongelmia. Myös muissa maissa on tämä kouluopetuksen yleisenä kohteena. Opetuksen yleisenä tavoitteena on kehittää sellaisia kansalaisia, jotka ovat itenäisiä ja aloitteellisia sekä motivoituneita ja kykeneviä kriittiseen ajatteluun, jotta pystyvät hallitsemaan elämässä eteen tulevat tilanteet.

### UUSIA VAATIMUKSIA ONGELMANRATKAISULLE

Psykologiset tutkimustulokset (mm. Bereiter & Scardamalia, 1996) vahvistavat aikaisemmin asetetun hypoteesin, että tosiasiat ja toimintatavat opitaan erilaisien mekanismien kautta. Siksi opetuksessa olisi käytettävä erilaisia menetelmiä toisaalta tosiasiatietojen (kuten valmiiden tulosten) ja toisaalta toimintatapojen (kuten edellä mainittujen tosiasioiden käyttämisen) opetukseen. Konventionaalinen kouluopetus soveltuu hyvin tosiasiatietojen oppimiseen. Sen sijaan toimintatapojen oppiminen vaatii oppilaiden omaa aktiivisuutta.

Aktiivista työskentelyä pidetään tärkeänä osatekijänä, kun tarkastellaan konstruktivismin kanssa yhteensopivaa oppimista (vrt. Davis, Maher & Noddings, 1990). Se painottaa jokaisen yksilön henkilökohtaista tapaa hahmottaa ja tarkastella maailma sekä sitä tosiasiaa, että tieto muotoutuu ja muuttuu toiminnan kautta. Lisäksi konstruktivismi painottaa voimakkaasti, että yksilön tietorakenne muotoutuu ja muuttuu vain hänen oman toimintansa kautta.

### Keskeiset käsitteet

Artikkelissa käytetyt keskeiset käsitteet (ongelma, ymmärtäminen) käydään tässä läpi lyhyesti, sillä niitä on käsitelty aikaisemmissa julkaisuissa laajemmin (esim. Pehkonen 2014).

Yleisesti ymmärretään *ongelmanratkaisu* keinona edistää matematiikan prosessien ja rakenteiden ymmärtämistä (vrt. Schoenfeld 1992). Siinä on keskeisenä ongelman käsite. Tässä tehtävän sanotaan olevan oppilaalle *ongelma*, jos sen ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä hänelle ennestään tuttua tietoa uudella tavalla. Jos ratkaisija voi heti tunnistaa ne toimenpiteet, jotka tarvitaan tehtävän ratkaisemiseen, niin kyseessä on hänelle *rutiinitehtävä* (tai standarditehtävä tai harjoitustehtävä) (vrt. Kantowski, 1980). Käsite 'ongelma' on siten suhteessa aikaan ja henkilön osaamiseen. Avoimessa ongelmassa (vrt. Pehkonen, 2004) alkua- ja/tai lopputilanne on avoin ja siksi ongelmallla on useita oikeita ratkaisuja. Esimerkkinä avoimesta ongelmasta on seuraava: "Jaa suorakulmio kolmeksi kolmioksi. Löydätkö erilaisia ratkaisuja?"

Viime aikoina on toteutettu monia tutkimusprojekteja oppilaiden matemaattisesta ymmärtämisestä. Näihin liittyen on kehitetty erilaisia ymmärtämisen malleja. Yleiskatsauksessaan ymmärtämisestä Mousley (2005) erottaa kolme tyyppiä matemaattisen ymmärtämisen malleissa: ymmärtäminen strukturoituna etenemisenä, ymmärtäminen tietämisen muotoina ja ymmärtäminen prosessina. Ensimmäiseen kategoriaan kuuluvat esimerkiksi mallit, jotka pohjautuvat Piaget'n ideoihin tai Vygotskyn "kehitysvyöhykkeisiin". Toisen kategorian malleista lienee tunnetuin Skempin kehittämä, joka ensimmäisenä erotti instrumentaalisen ja relationaalisen ymmärtämisen; myöhemmin hän lisäsi mukaan loogisen ymmärtämisen kolmantena kategoriana (Skemp 1987). Esimerkiksi Pirie & Kieren (1994) esittivät mallin kolmannelle tyyppistä: ymmärtäminen prosessina. He kuvaavat kahdeksan mahdollista tasoa matemaattisen ymmärtämisen kasvun puitteissa.

### **Avoimet lähestymistavat**

Useimmat matematiikkatehtävät koulukirjoissa ovat *suljettuja*, ts. niiden alkua- ja lopputilanne on täsmällisesti annettu; ainoastaan ratkaisutavassa on jonkin verran vapautta. Sen sijaan tehtävän sanotaan olevan *avoin*, jos sen alkua- tai lopputilanne ei ole tarkasti annettu. Sellaisten tehtävien kohdalla on oppilailla vapautta, koska he voivat itse määrätä joitakin tehtävän parametrejä. Mutta siksi niillä voi olla erilaisia, mutta samanarvoisia oikeita ratkaisuja, koska tulos riippuu ratkaisijan tekemistä ylimääräisistä oletuksista ja painotuksista. Tästä seuraa, että avoimilla tehtävillä voi olla yleensä useampia oikeita vastauksia. Käytettäessä avoimia tehtäviä on oppilailla mahdollisuus toimia luovan matemaatikon tavoin (vrt. Brown, 1997).

Eräs mahdollinen menetelmä auttaa opettajaa rakentamaan oppilailleen optimaalisia oppimisympäristöjä on ns. avoin lähestymistapa. Tämä käsite kehitettiin 1970-luvulla Japanissa (vrt. Nohda, 1991; Becker & Shimada, 1997). Samantapaisia lähestymistapoja rakennettiin myös muissa maissa, ja vähitellen sellaiset menetelmät ovat hyväksytyt monissa maissa. Tähän liittyy läheisesti Schroeder & Lester (1989) -artikkelin esittämä ongelmanratkaisun opettamisen kolme tapaa: opettaa erillisiä ongelmia (teaching of PS), opettaa soveltamista varten (teaching for PS) ja opettaa ongelmanratkaisun kautta (teaching via PS). Viimeinen tapa liittyy juuri avoimeen lähestymistapaan.

## Opettaa ongelmanratkaisun kautta

Opetettaessa ongelmanratkaisun kautta oppiminen tapahtuu ratkaisuprosessin yrityksissä, jossa tulevat käyttöön ongelman kannalta oleelliset matemaattiset käsitteet ja taidot (vrt. Lester & Charles, 2003). Kun oppilaat ratkovat ongelmia, he voivat käyttää mitä tahansa ajateltavissa olevaa keinoa ja perustella ratkaisuideansa tavalla, jonka he kokevat olevan vakuuttavia. Näistä ratkaisuideoista keskustellaan yhdessä ja niiden pätevyys tarkistetaan yhdessä.

Oppimisympäristönä "ongelmanratkaisun kautta opettaminen" tarjoaa oppilaille luonnollisen tilanteen esittää erilaisia ratkaisuja luokkatovereilleen ja oppia matematiikkaa sosiaalisen kanssakäymisen kautta, jolloin neuvotellaan merkityksistä ja päästään yhteiseen ymmärrykseen. Tällaiset aktiviteetit voivat auttaa oppilaita selkiyttämään ideoitaan ja hankkimaan erilaisia näkökulmia siihen käsitteeseen tai ideaan, jota ovat oppimassa. Täten "ongelmanratkaisun kautta opettaminen" auttaa oppilaita pääsemään erillisten ideoiden taakse ja kehittää kasvavasti yhtenäinen ja monimutkaisen tietosysteemin (vrt. Cai 2003). Ongelmanratkaisun pointti on siinä, että tuloksellisen ratkaisun hankkiminen vaatii oppilaita tarkistamaan, yhdistämään ja muotoilemaan sitä tietoa, jonka he ovat jo oppineet (cf. Lesh & Zawojewski, 2007).

Teoreettinen tuki tälle lähestymistavalle saadaan oppimisen konstruktivistisesta ja sosiokulttuurisesta perspektiivistä (esim. Hatano, 1993; Cobb, 1994; Hiebert & al., 1997). Kun oppilaat selittävät ja perustelevat ajatteluaan sekä haastavat luokkatovereittensa ja opettajan selitykset, he ovat myös innostuneita oman ajattelunsa selvittämiseen ja siten omaksuvat "tietämisen" (Lampert, 1990).

Oppilaiden ongelmanratkaisukykyjen kehittäminen ei ole vain oleellinen osa matematiikan oppimista yli sisältöalueiden, vaan se on myös keskeinen osa matematiikan oppimista kaikilla luokkatasoilla. Suomen opetussuunnitelmien mukaan (OPH 2004, 2014) oppilaille pitää opettaa matematiikkaa esikoulusta lähtien sellaisella tavalla, joka edistää matemaattisten käsitteiden ja proseduurien ymmärtämistä sekä ratkaisemaan ongelmia. Kirjallisuudessa on vahvaa näyttöä sille, että jopa hyvin nuoret oppilaat ovat kykeneviä tutkimaan ongelmatilanteita ja keksimään ratkaisustrategioita (vrt. Cai 2000). Pitkän aikavälin tavoitteena pitäisi olla oppilaiden auttaminen kehittymään menestyksellisiksi ongelmanratkaisijoiksi, niin että jokaisella luokkatasolla, jokaisen matemaattisen sisällön kohdalla ja jokaisella oppitunnilla pyritään saavuttamaan tämä tavoite (vrt. OPH 2004).

Mutta opettajat voivat muodostaa esteen: Cazden (1986) tuo esille, että on olemassa näyttöä, että monet opettajat ajattelevat heidän tehtävänsä olevan poistaa oppilailta haasteet (ja esteet), kun oppilailla on edessään ongelmatehtävä. Siispä he muuntavat ongelmat oppilailleen helpommiksi ja mekaanisemmiksi. Tästä syystä ei oppilaan mahdollisuus oppia luokassa riipu vain siitä materiaa-

lista, jota käytetään eikä opettajan antamista tehtävätyypeistä, vaan myös luokkahuonediskurssista ongelmanratkaisun aikana, sekä opettajan ja oppilaiden sekä oppilaiden välillä. Tällaisesta toiminnasta, etteivät opettajat salli oppilaidensa kamppailevan haasteellisten tehtävien kanssa, näyttää olevan muutakin näyttöä. Esimerkiksi vastaavanlaista opettajan toimintaa voitiin havaita myös Suomi-Chile -tutkimusprojektissa (vrt. Pehkonen & Portaankorva-Koivisto 2015).

## ONGELMAKENTÄT OPETUKSESSA

Tutkimustehtävät (investigations) voidaan jakaa strukturoituihin ja ei-strukturoituihin. Jälkimmäisissä oppilaille annetaan tehtävätilanne ja joitakin alkuongelmia. Sitten heidän pitää jatkaa itsenäisesti. Strukturoituja tutkimustehtäviä kutsutaan myös *ongelmakentiksi* (tai ongelma-alueiksi tai ongelmajonoiksi). Näissä opettajalla on valmiina joukko jatkokysymyksiä (ongelmia) ja hän päättää, miten pitkälle ongelmakentässä edetään.

### Yleistä ongelmakenttien käyttämisestä

Tarkastellaan vähän myöhemmin esimerkkinä ongelmakenttää, jonka käytöstä kirjoittajalla on runsaasti kokemuksia yli 25 vuoden ajalta: *Monikulmioita tulituksilla*. Tällä ongelmakentällä pyritään antamaan edustava esimerkki sellaisista matemaattisista ongelmista, joita kirjoittaja on kehittänyt peruskoulun yläluokkien matematiikan opetuksen käyttöön. Ongelmakentän puitteissa ongelmien vaikeustaso vaihtelee hyvin helpoista ongelmista, jotka todennäköisesti koko luokka pystyy ratkaisemaan, monimutkaisiin ongelmiin, joita vain lahjakaimmat pystyvät ratkaisemaan.

Koska ongelmakentät edistävät ensi sijassa ongelmanratkaisukykyä ja luovuutta, on niille tyypillistä etteivät ne ole sidottuja tiettyyn luokkatasoon. Ongelmakentät soveltuvat matematiikanopetukseen yleensä peruskoulun alaluokilta opettajankoulutukseen. Helpompien ongelmien rooli ongelmakentässä on heikosti suoriutuvien oppilaiden ongelmanratkaisukyvyn kehittäminen. Nopeasti oivaltaville löytyy monimutkaisempia rinnakkaistehtäviä.

Kaikkein tärkeintä ongelmakentässä tapa, miten sitä käytetään: Ongelmakenttä pitää tarjota oppilaille pienissä osissa ja jatkotoimenpiteet riippuvat oppilaiden vastauksista. Vastausten ja tulosten sijaan, joita ei yleensä oppilaille anneta (eikä opettajalle), on kaikkein tärkeintä ongelmanratkaisuprosessi. Tällöin on äärimmäisen tärkeitä käyttää hyväksi oppilaiden luovuutta ja kehittää sitä edelleen. Kuinka pitkälle opettaja työskentelee luokan kanssa käsillä olevan ongelman kohdalla riippuu oleellisesti oppilaiden antamista vastauksista. Kun oppilaat eivät enää keksi lisää vastauksia, voidaan ongelmakentän käsittely lopettaa, jotta oppilaat eivät menettäisi motivaatiotaan. Opettaja voi ehkä joskus myöhemmin palata tähän ongelmaan. On huomattava, etteivät vastaukset ole tärkeitä, vaan oppilaiden itsenäinen ratkaiseminen.

Siispä opettajan rooli on ongelmakentässä työskenneltäessä – kuten Schoenfeld (1987) sanoo – toimia keskustelun johtajana ja sihteerinä. Ts. opettaja kirjoittaa

kaikki luokassa esitetyt ratkaisuvaihtoehdot kommentoimatta taululle, myös mahdolliset harhapolut, jotka ratkaisuideat sitten yhdessä keskustellen selvitetään. Oppilaat miettivät eri ratkaisuvaihtoehtojen (myös harhapolkujen) järkevyyden ja oikeellisuuden.

Kun ongelmakenttiä käytetään normaalin kouluopetuksen puitteissa, on koeteltu keino käyttää osa lopputunnista (ehkä 10 min) ongelmakentän jonkin osaongelman keskusteluun ja jatkaa sitä seuraavalla tunnilla. Näin oppilaille jää mahdollisuus miettiä useita avoimeksi jääneitä kysymyksiä kotitehtävänä. Täten kaikki oppilaat saavat riittävästi aikaa pohdiskella, jolloin onnistumiskokemusten todennäköisyys voi kasvaa.

Opettaja käsitys hyvästä matematiikanopetuksesta ohjaa vahvasti hänen opetusratkaisujaan. Vaikka opettajan odotetaan käyttävän ja kehittävän avoimia ongelmia koulun matematiikanopetuksessa ja hän olisi käynyt vastaavan täydennyskoulutuskurssin, mutta jos avoin opetus ei sovi yhteen hänen opetuskäsityksen kanssa, niin opettaja ei pysty toteuttamaan tällaista opetusta. Siksi opettajan uskomukset ja käsitykset matematiikanopetuksesta ovat avainasemassa (vrt. Shaw, Davis & McCarty, 1991).

### ESIMERKKI: Monikulmioita tulitikuilla

Tässä käsitellään konkreettista ongelmakenttää (*Monikulmioita tulitikuilla*), joka on tarkoitettu peruskoulun ylemmille luokille (6 luokasta ylöspäin).

#### *Alkutilanne*

Käytössä on 12 tulitikkua, joilla tämä ongelma voidaan konkretisoidaan: *Näillä 12 tulitikulla pystytään rajaamaan neliö, jonka pinta-ala on 9 PA (PA = pinta-alayksikkö)* (ks. kuva 1).

Tässä ongelmakentässä olevien ongelmien pääidea on, että monikulmion piiri on kaiken aikaa 12 tulitikkua. Sen sijaan monikulmion pinta-ala vaihtelee.

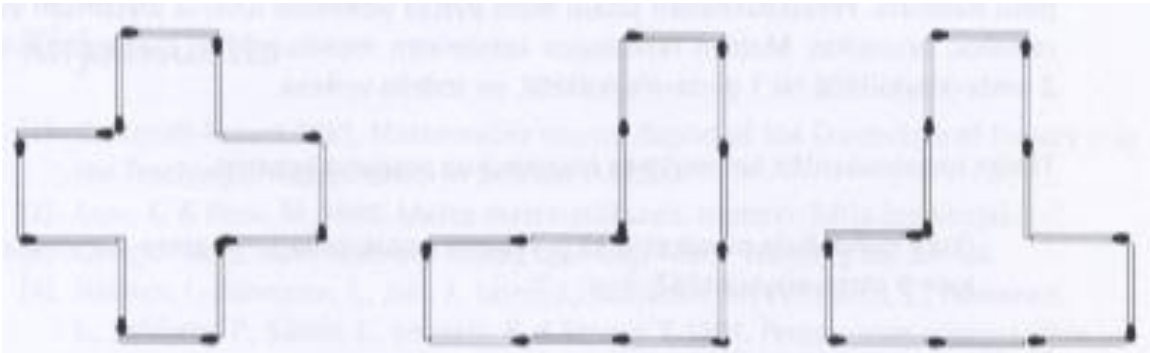


*Kuva 1: Kahdellatoista tulitikuilla rajataan neliö (pinta-ala 9 PA).*

Ensimmäinen ongelma tilanteessa voisi olla seuraava: *Voitko rajata 12 tulitikulla monikulmion, jonka pinta-ala on 5 PA?*

Jos opettaja haluaa antaa enemmän ajattelu-aikaa hitaille oppilaille, hän voi nopeita oppilaita pyytää laatimaan toisen ratkaisun (ja kolmannenkin). Näin opettaja saa aikaa heikosti menestyvien ratkaisuyrityksiin, sillä usein he eivät ehdi kunnolla päästä alkuun ongelmassa, kun joku luokasta jo ratkaisee se.

Seuraavana tehtävänä voidaan pohtia edellisen ongelman erilaisten ratkaisujen lukumäärää: *Kuinka monta erilaista monikulmiota (pinta-ala 5 PA) voidaan 12 tulitikulla muodostaa? Onko ratkaisuja enemmän kuin 10?*



*Kuva 2: Joitakin monikulmioita, joiden pinta-ala on 5 PA (ja piiri 12 tikkua).*

Oppilaat löytävät todennäköisesti monia ratkaisuja. Mutta on olemassa (monimutkaisempia) ratkaisuja, joita he ehkä eivät löydä. Seuraava vaihe voisi olla oppilaiden löytämien erilaisten ratkaisujen vertaileminen. *Kuinka monta erilaista ratkaisua koko luokka löytää yhteensä?*

Toinen helpompi suunta varioida ongelmaa on vaihtaa vaatimusta pinta-alasta. *Onko mahdollista muodostaa 12 tulitikulla monikulmio, jonka pinta-ala on 6 PA (tai 7 PA, 8 PA)?*

Tässä varmaan kaikki oppilaat keksivät perusratkaisut (kuva 3), kun vain annetaan riittävästi aikaa (esimerkiksi kotitehtävänä). Nopeimmille oppilaille voidaan tarjota esim. seuraavat jatkokysymykset, joilla saadaan hitaammille oppilaille aikaa edelleen pohdiskeluun. Esimerkiksi jokaisen pinta-alan kohdalla voidaan kysyä erikseen: *Onko muita ratkaisuja? Kuinka monta erilaista ratkaisua on yhteensä?*



*Kuva 3: Esimerkkejä monikulmioista, joiden pinta-ala on 8 PA, 7 PA vast. 6 PA.*



Tähän mennessä käytetty ratkaisumenetelmä – poistetaan neliön kulmasta pieni neliö (kuten kuvassa 3) – toimii aina pinta-alaan 5 PA asti. Sitten on keksittävä uusia ideoita ratkaisuja varten.

#### *Ratkaisumenetelmän vaihtaminen*

Pinta-ala 5 PA pienempien monikulmioiden löytäminen näyttää olevan oppilaille vaikeaa (myös opettajille), koska nyt on vaihdettava ratkaisumenetelmää. *Onko mahdollista rajata 12 tulitikulla monikulmio, jonka pinta-ala on 4 PA (tai 3 PA, 2 PA, 1 PA)?*

Pythagoraan lauseen avulla (ns. egyptiläinen kolmio) voidaan muodostaa monikulmio, jonka pinta-ala 4 PA ja 3 PA. Toinen mahdollisuus on keksiä yleinen ratkaisu (suunnikas). Jos joku luokasta löytää suunnikasratkaisun, niin siitä pitää toki keskustella ja tuoda esille sen yleinen luonne. Mutta sen jälkeen voi kysyä, löytävätkö oppilaat vielä toisenkin ratkaisun. Mutta tämä yleinen ratkaisu tulee hyvin harvoin esille.

#### *Opetuskokemuksia*

Viimeisten 25 vuoden ajan on kirjoittaja työskennellyt ongelmakentän parissa erilaisten oppijaryhmien kanssa – opettajien perus- ja täydennyskoulutuksesta aina peruskoululais- ja lukiolaisryhmiin asti. Tavallisimmin ongelmakentän läpityöskentely opettajien tai oppilaiden kanssa vie aikaa noin 30 min. Ts. sen jälkeen eivät osallistujat pysty tuottamaan uusia ratkaisuja. Näiden kokemusten perusteella on kehittynyt ehdottamani opetusratkaisu, että ongelmakenttä käsitellään kouluopetuksessa paloittain.

Opettaja- ja oppilasryhmissä olemme löytäneet monia monikulmioita, joiden pinta-ala on 4 PA, 5 PA, 6 PA, 7 PA ja 8 PA. Sen sijaan monikulmiot, joiden pinta-ala on pienempi kuin 4 PA (tai 3 PA), näyttävät kuitenkin olevan liian monimutkaisia löytää 30 min:ssä. Vain muutamassa ryhmässä (ja yleensä vain yksi henkilö) on pystytty tuottamaan yleinen ratkaisu (suunnikas). Sen jälkeen kun kaikki uudet ratkaisuideat on keskusteltu läpi ryhmässä, olemme jättäneet ongelmakentän viimeisen ratkaisemattoman ongelman kotitehtäväksi (riippumatta siitä, miten pitkälle ratkaisuihin on päästy). Näihin ratkaisuihin voidaan palata myöhemmin, jos osallistujat keksivät lisää ideoita.

On huomattava, että ongelmakenttien käyttämisen päätavoite on tarjota osallistujille mahdollisuus työskennellä kuin matemaatikko (vrt. Brown, 1997), ts. ei tarjota osallistujille valmiita ratkaisuja, vaan antaa heidän keskenään päättää löydettyjen ratkaisujen oikeellisuus. Opettajien perus- ja täydennyskoulutuksessa on painopiste ollut siinä, että opettajille näytetään, miten ongelmakenttien kanssa toimitaan, sekä annetaan opettajille mahdollisuus kokea oppilaiden tunteita ongelmien ratkaisemisessa.

Syksyllä 1996 kirjoittaja sai tilaisuuden johtaa ryhmää Jenassa (Saksa) erikoislahjakkaita lukiolaisia tämän ongelmakentän ratkaisemisessa. Oppilaat pitivät ongelmia mielenkiintoisina, kun kysyttiin pinta-ala 5 PA pienempiä pinta-aloja. Myös lahjakkaat tarvitsivat paljon aikaa, kun haettiin muita ratkaisuja

kuin suunnikas. Siksi voidaankin sanoa, että tällaisilla ongelmakentillä ei ole pelkästään laaja koululuokkakattavuus, vaan myös ne sisältävät materiaalia kaikille eri suoritustasoille.

## LOPUKSI

Ongelmakentät tuovat avoimuutta opetukseen. Ongelmakenttien käyttäminen edistää oppilaiden matemaattista ajattelua ja luovuutta. Tällöin yleinen käsitys matematiikasta tiukkana ja abstraktina oppiaineena saadaan muutettua ja useammat oppilaat voivat kokea jopa iloa ja nautintoa matematiikkaopinnoissa. Kun oppilaat ratkaisevat ongelmia matematiikanopetuksessa – erikoisesti avoimia ongelmia – muuttuu opetus myös opettajalle mielenkiintoisemmaksi, koska hän ei voi varautua kaikkiin tilanteisiin.

Jotta opettajat voivat toteuttaa opetuksen avoimia ongelmia käyttäen, on heillä oltava kiinnostusta kehittää opetustaan ja koettava velvollisuudekseen toteuttaa uusia ideoita opetuksessaan (vrt. Shaw ym. 1991). Konstruktivismin yhteydessä nousivat esille opettajien matematiikkaan liittyvät uskomukset (vrt. Davis ym. 1990). Uskomukset ymmärretään tässä tietoina ja tuntemuksina matematiikasta ja matematiikanopetuksesta, jotka pohjautuvat aikaisempiin kokemuksiin. Nämä uskomukset ohjaavat ja strukturoivat jokaista opetus- ja oppimisprosessia. Opetus-oppimis-prosessien muuttaminen tarkoittaa myös opettajien uskomusten hyvistä ja tuloksellisesta opetuksesta kehittämistä ja muuttamista.

## Loppulause

Suomen opetussuunnitelma asettaa vaatimuksen, että koulussa olisi kehitettävä (alkuopetuksesta lukion loppuun) laskutaidon ohella myös oppilaiden ongelmanratkaisua ja matemaattista ajattelua (OPH 2004, 2014). Koska tämä tavoite ei näytä toteutuvan tavanomaisen opetuksen puitteissa, on opetukseen tuotava uusia elementtejä: sellaisia tehtäviä, joilla opettaja voi harjoittaa oppilaiden ongelmanratkaisu- ja ajattelutaitoja. Jatkossa pitäisi kehitellä enemmän hyväksi koeteltuja ongelmakenttiä ja jakaa niitä muille opettajille.

Julkaistussa kirjallisuudessa on monia tutkimusraportteja opettajien muuttamis- ja kehittämishdoista. Mutta ei mikään kuvatuista interventionmenetelmistä näytä olevan ilman muuta tuloksellinen. Näyttää siltä, etteivät ulkopäin säädellyt muutokset opettajissa ole mahdollisia. Heille voidaan enintään antaa ideoita muuttumissuunnasta, mutta opettajien täytyy itse kehittää omat ratkaisunsa ja työskennellä niiden toteuttamiseksi. Enemmän opettajamuutoksen ongelmista löytyy esimerkiksi julkaisussa Pehkonen (2007).

## LÄHTEET

- Becker, J. & Shimada, L. (1997). *The open-ended approach*. Reston (VA): NCTM.
- Bereiter, C. & Scardamalia, M. (1996). Rethinking learning. Teoksessa D.R. Olson & N. Torrance (toim.), *The handbook of education and learning. New models of learning, teaching and schooling*. Cambridge (MA): Blackwell.

- Brown, S. I. (1997). Thinking Like a Mathematician: A Problematic Perspective. *For the Learning of Mathematics*, 17(2), 36–38.
- Cai, J. (2000). Mathematical thinking involved in U.S. and Chinese students' solving process-constrained and process-open problems. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 2, 309-340.
- Cai, J. (2003). What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In F. Lester (Ed.), *Research and issues in teaching mathematics through problem solving* (pp. 241-254). Reston, VA: NCTM.
- Cazden, C. B. (1986). Classroom discourse. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.) (pp.432-463). New York: Macmillan.
- Cobb, P. (1994). Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development. *Educational Researcher*, 23, 13-20.
- Davis, R.B., Maher, C.A. & Noddings, N. (toim.) (1990). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*. JRME Monograph Number 4. Reston (VA): NCTM.
- Hatano, G. (1993). Time to merge Vygotskian and constructivist conceptions of knowledge acquisition. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (pp. 153-166). New York: Oxford University Press.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Kantowski, M.G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. In: *Problem Solving in School Mathematics* (eds. S. Krulik & R.E. Reys), 195–203. NCTM Yearbook 1980. Reston (VA): Council.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.
- Lesh, R. & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *The Handbook of research on mathematics teaching and learning* (2nd ed.) (pp. 763-804). Reston, VA: NCTM.
- Lester, F. K. & Charles, R. (2003). *Teaching mathematics through problem solving: Pre-K – Grade 6*. Reston, VA: NCTM.
- Mousley, J. (2005). What Does Mathematics Understanding Look Like? Teoksessa P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce, et al. (toim.), *Building connections: Theory, research and practice. Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne*. Sydney: MERGA.

- Nohda, N. (1991). Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 23(2), 32–37.
- OPH (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.
- OPH (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. [http://www.oph.fi/download/163777\\_perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf).
- Pehkonen, E. (2004). State-of-the-Art in Problem Solving: Focus on Open Problems. Teoksessa H. Rehlich & B. Zimmermann (toim.), *ProMath Jena 2003. Problem Solving in Mathematics Education* (s. 93–111). Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Pehkonen, E. (2007). Über "teacher change" (Lehrerwandel) in der Mathematik. Teoksessa A. Peter-Koop & A. Bikner-Ahsbahr (toim.), *Mathematische Bildung - mathematische Leistung: Festschrift für Michael Neubrand zum 60. Geburtstag* (s. 349–360). Hildesheim: Franzbecker.
- Pehkonen, E. (2014). Open problems as means for promoting mathematical thinking and understanding. Teoksessa A. Ambrus & E. Vásárhelyi (toim.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 15<sup>th</sup> ProMath conference in Eger* (s. 152–162). Eötvös Loránd University.
- Pehkonen, E. & Portaankorva-Koivisto, P. (2015). Teacher change via participation to a research project. *A paper presented in the MAVI seminar in Falun (Sweden) in October 2014* (10 pages).
- Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how we can characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics Education* 26 (2-3), 165–190.
- Schoenfeld, A.H. (1987). What's All the Fuss About Metacognition? Teoksessa A.H. Schoenfeld (toim.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (s. 189–215). Hillsdale (NJ): Lawrence Erlbaum.
- Schroeder, T. L. & Lester, F. K. (1989). Understanding mathematics via problem solving. Teoksessa P. Trafton (toim.), *New directions for elementary school mathematics* (s. 31 - 42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Shaw, K.L., Davis, N.T. & McCarty, J. (1991). A cognitive framework for teacher change. Teoksessa R.G. Underhill (toim.), *Proceedings of PME-NA 13, Volume 2* (s. 161–167). Blacksburg (VA): Virginia Tech.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

## **POLYASTA TUNKKIIN, TUNKISTA PENROSEN LAATOITUKSEEN: ESIMERKKI MERKITYSNARRATIIVIN RAKENTUMISESTA**

Jaska Poranen & Sari Yrjänäinen

Tampereen yliopisto

*Tampereen yliopiston kasvatustieteiden yksikössä (EDU) opetetaan Tampereen yliopiston informaatiotieteiden yksikön (SIS) didaktisen matematiikan 60 opintopisteen kokonaisuudesta neljä kurssia (4\*5op). Yksi kursseista on Matemaattinen ja pedagoginen ongelmanratkaisu (KASMAT3). Erityisesti pedagogisen ongelmanratkaisun käsite vaatii edelleen muun muassa käsitteellistä seloitustyötä. Me liitämme pedagogisen ongelmanratkaisun perinteiseen matemaattiseen ongelmanratkaisuun, erityisesti G. Polyan mielessä, opettamisen DAP-malliin sekä merkitysnarratiivin rakentumiseen. Tarkastelemme artikkelissa tasogeometriaan liittyvän merkitysnarratiivin rakentumista, kun opettaja pedagogisena ongelmanratkaisijana sovittaa arkista auton tunkkia ja matemaattista todistamista toisiinsa.*

### **JOHDANTO**

Matematiikkaa koulussa moititaan liian usein puuhasteluksi, jolla ei ole mitään kontaktipintaa arkielämään. Matematiikan opiskelussa tulisi nähdä toki muitakin ulottuvuuksia, koska onhan se jotain jota voidaan kutsua myös logiikaksi tai ajatteluksi, vähintäänkin keinoksi mallintaa maailmaa yleispätevällä tavalla.

Ihminen tulkitsee kokemuksiaan, muodostaa niistä merkityksiä ja kokoaa merkityksistä koostuvia kertomuksia eli narratiiveja. Merkitykset luodaan tilanteissa, joiden tapahtumat muuttuvat kokemuksiksi persoonallisten tulkintojen kautta. Tätä merkitysten luomisen prosessia on kuvattu myös reflektion käsitteellä. Olennaista on, että merkitykset eivät synny itsestään tai niitä ei vain löydetä, vaan ne ovat opiskelu- ja oppimisprosessien tulosta. Merkitysten kielellistäminen on narratiivien muodostuksen ensimmäinen edellytys ja siksi oppitunnilta pitäisi keskustella enemmän. Yksittäisiin ilmiöihin tai asioihin liittyvät, monesti varsin abstraktit ja ei-kielelliset merkitykset, on liitettävä yhteen ja koostettava osaksi yhtä kielellistä kertomusta. Tätä voidaan kutsua narratiivien rakentumisen prosessiksi. (vrt. Yrjänäinen ja Ropo 2013.)

Tavoitteellista matematiikan opiskelua voidaan pitää ymmärryksen saavuttamisessa työvälteenä. Opiskelu on tietoista toimintaa, joka tähtää merkityksenmuodostukseen. Kysymys voi olla merkityksenannosta suhteessa ennakkokäsityksiin, ennalta tiedettyyn, taitoihin ja toimintaan, omaan itseen, tai vaikkapa omaan menneisyyteen ja tulevaisuuteen. Opiskeluprosessissa on keskeistä luoda riittävän intensiivinen ja persoonallinen suhde ilmiöön, kohteeseen, asiaan, niiden kontekstuaalisiin tekijöihin ja tilanteen toimijoihin. Narratiivi on

ennen kaikkea merkityksiä yhteenliittävä konstruktio, ja siksi puhumme jatkossa erityisesti merkitysnarratiiveista.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (POPS 2004) sanotaan, että

...matematiikan opetuksen tehtävänä on tarjota mahdollisuuksia matemaattisen ajattelun kehittämiseen ja matemaattisten käsitteiden sekä yleisemmin käytettyjen ratkaisumenetelmien oppimiseen ... konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään.

Vastaavasti lukion matematiikasta (LOPS 2003) kirjoitetaan mm., että

...matematiikan opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä ... opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä.

Näiden lainausten avulla haluamme korostaa OPSien viestiä: matemaattisen perustelemisen tärkeyttä unohtamatta arkea ja konkretiaa. Matemaattiseen kulttuuriin liittyy täsmälliset määritelmät, hyvin muotoillut väitteet, ja niiden kumoaminen tai oikeaksi todistaminen, mutta myös arki ja kokemukset. Opetuksen tulee tarjota oppijalle mahdollisuuksia rakentaa omia merkitysnarratiiveja osana opiskeluprosessia.

Matemaattisen ongelmanratkaisun (MOR) perinne on monipuolinen, mutta viittaamme tässä artikkelissa vain alan perushahmoon G. Polyaan (esim. Polya 1973a, 1973b, 1980). Polyan tapa lähestyä kysymyksiään on innostava. Hän sijoittaa kysymyksensä yleisesti ymmärrettävissä olevaan tilanteeseen tai tulkin-takehykseen, vaikka kyse olisikin abstraktista ja vaativasta asiasta. Hänellä on kyky nähdä tutkimansa asian yhteyksiä mitä moninaisimpiin muihin seikkoihin. Hän voi esittää yhden ratkaisun, mutta ideoida sitten jokseenkin saman tien aivan uuden tavan ajatella koko kysymystä. Kaiken lisäksi hänen ongelmansa näyttävät usein löytyvän tavallisesta koulumatematiikasta tai yliopistomatematiikan alkeista.

Myös Nevanlinnan (1971) mukaan matematiikassa ovat käytännön eri alueet ja teoreettinen ajattelu mutkikkaassa vuorovaikutussuhteessa; matematiikka voi saada virikkeensä luonnon ja elämän ilmiöistä, mutta voi toisaalta sellaisenaan valaista ja selventää mahdollisia sovellusalueita. Nevanlinna (1964) analysoi arvostavasti arkisesta ympäristöstä nousevan geometrian yhteyttä matemaattiseen geometriaan. Hän ottaa käyttöön käsitteet *näköavaruus* ja *näkemysavaruus*, joista edellinen liittyy arkeen ja konkreettis-toiminnallisuuteen, ja jälkimmäinen vastaavasti geometriaan tieteenä. Siirryttäessä näköavaruudesta näkemysavaruuteen ei vain abstrahoida, vaan silloin myös täydennetään – ja juuri tässä konstruktiivisessa puolessa ”piilee ajatuksen ja ideoitten varsinainen luova puoli” (emt., 18 - 21).

Erityisesti Polyan edustama MOR-perinne on taitavaa merkitysnarratiivin rakentamista, jossa erottuvat selvästi myös DAP-opetusmallin elementit (vrt. Yrjänäinen & Ropo 2013). Polyan yleistä asennetta, luovuutta ja energiaa ei tarvitse rajoittaa vain tavanomaisen matematiikan opettamisen ja oppimisen uudistamiseen ja kehittämiseen. Se antaa uskoa ja mallia opettajalle yleisemmin pedagogisena ongelmanratkaisijana (myöh. OPOR) suhteessa esimerkiksi oppilaiden asenteisiin, oppimisvaikeuksiin ja eriyttämiseen. Opettajan työn määrittely OPOR-näkökulmasta heijastuu opettajan ammatti-identiteettiin: siihen tulee entistä korostuneemmin mukaan myös holistisuus, luovuus ja joustavan positiovarannon kasvattaminen.

Määrittelemme opettajan pedagogisen ongelmanratkaisun olevan kykyä luoda merkitysnarratiivin (Yrjänäinen & Ropo 2013) syntymisen edellytykset DAP-mallia (Yrjänäinen 2011) soveltaen. Pelkistetyksi sanoen D-kirjain viittaa käsitteeseen diskurssi, jolla viitataan viestintätapaan eli *mitä* (opetussuunnitelma, oppiaine tieteenä ja kouluaineena jne.) opetetaan. A-kirjain viittaa sanaan affordanssi eli toiminnan tarjouma ja näin ollen siihen, *miten* (opetusjärjestelyt eli toiminnan mahdollisuudet) opetetaan, ja P eli positioitumisen käsite siihen, *miksi* (toimijoiden ennakkokäsitykset, odotukset, asenteet, taidot, suhde toisiin ja opetettavaan asiaan, jne) jotain opetetaan.

Oppituntitilanteessa opettaja koettaa ymmärtää erilaisia diskursseja ja opettaa samalla opiskelijoilleen matematiikkaan liittyvää puhunnan tapaa. Opettaja kiinnittää opettaessaan opiskelijoiden huomioita sopiviin affordansseihin, ja auttaa ja neuvoa niiden hyödyntämisessä. Positioidessaan itseään suhteessa opiskelijoihin opettaja voi olla asiantuntija ja kokeilija ja hän voi nähdä opiskelijansa esimerkiksi uteliaina, pelokkaina, välinpitämättöminä tai osaavina kanssатыöskentelijöinä. Tässä artikkelissa DAP-malli toimii taustaselittäjänä, miksi ylipäättään lähestyä tasogeometriaa (diskurssi) tunkin (affordanssi) kautta, ja mihin tunkin avulla voidaan päästä (positioituminen tiedonrakentelijaksi).

Merkitysnarratiivin syntymisessä, synnyttämisessä ja kehittämisessä on koko ajan kyse oppimisesta ja opiskelusta (Yrjänäinen & Ropo 2013). Siihen liittyy myös itseohjautuvuutta, assosiatiivisuutta ja ennustamattomuutta. Näiden elementtien avulla syntyy syvempi mahdollisuus asioiden omakohtaiseen ymmärtämiseen, osallisuuteen ja merkityksen antoon. Samalla on mahdollista kaivata kulttuurista kuilua, mikä on olemassa työskentely- ja ajattelutapoihin liittyen matematiikan ja useimpien muiden opiskeltavien asioiden välillä. On luonnollista sallia merkitysnarratiiveissa myös virheet ja erehtymiset. Niiden analyysissa ja korjaamisessa on tilaus opettajan pedagogiselle ongelmanratkaisulle.

Kaikkeen havaitsemiseen liittyy *tulkintaa ja teoriaa* (vrt. esim. Niiniluoto 1980, 224). Havaitaksemme jotakin *merkitsevää* tarvitsemme alustavasti ohjaavaa käsitteistöä; toisaalta tällaisen käsitteistön soveltaminen voi johtaa uusiin havain-

toihin ja sitä kautta uusiin käsitteisiin – tai tarpeeseen luoda niitä. Nähdäksemme tulkinta on sopusoinnussa myös Nevanlinnan käsitteiden kanssa. Myös Silfverberg on tutkinut yleisiä geometris-visuaalisen informaation prosessointiin liittyviä tekijöitä (Silfverberg 1999). Oikeastaan mikään edellä mainituista lähteistä ei kuitenkaan varsinaisesti näytä *tarttuvan* esineisiin, jotka voivat toimia geometrisen inspiraation lähteinä. Pehkonen (1989) lähestyi aihetta auton pyyhkijänsulkien kautta ja antoi idean lähestyä kolmiogeometriaa sitä kautta. Me tartumme nyt tunkkiin.

## RENKAIDEN VAIHTOA, IHMETTELYÄ JA HAVAINTOJA



*Kuva 1: Erään tunkin käyttöä ja siihen liittyvää ihmettelyä*

Kuvan 1 nelikulmion muotoinen tunkkimme rakentuu neljästä kiinteämittaisesta (yhtä pitkistä), toisiinsa nivelletyistä sivuelementeistä sekä ruuvausmekanismista, joka yhdistää nelikulmion kaksi vastakkaisista kärkeä. Tämän nelikulmion muoto muuttuu, kun autoa nostetaan. Sivujen pituuksia ei voi muuttaa. Tunkin turvallinen toiminta perustuu siihen, että se nostaa autoa pystysuoraan ylöspäin ruuvausmekanismin ollessa vaakasuorassa.

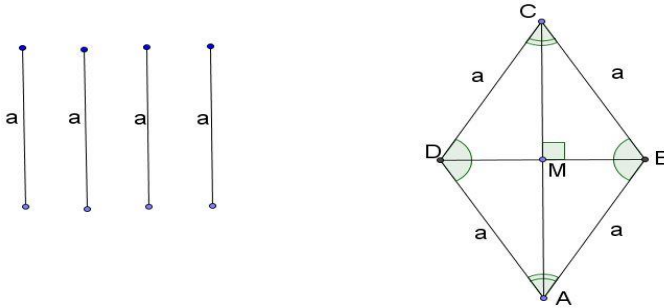
Kokeillaan erilaisia tunkin muotoja käyttämällä sen ruuvausmekanismia. Tällöin syntyy helposti kulmia ja niiden muuttumista koskevia havaintoja ja väittämiä. Esimerkiksi: vastakkaiset kulmat näyttävät olevan aina yhtä suuria – ja sitä pienempiä mitä kauempana ne ovat toisistaan, vastakkaiset kulmat ovat sitä lähempänä oikokulmaa mitä pienempi niiden välinen etäisyys on, jne. Vastaa-vasti syntyy luontevasti havaintouskomus, että tunkin vastakkaiset sivut vai- kuttavat olevan aina yhdensuuntaisia.

Otetaan sitten lisäksi käyttöön esimerkiksi luotilanka, joka kiinnitetään tunkin siihen kohtaan, mikä on kontaktissa autoon tunkkia käytettäessä. Nyt syntyy helposti näkemys, että ruuvausmekanismin linja ja luotilanka leikkaavat toisensa aina kohtisuorasti. Sanomme nyt ruuvausmekanismin ja luotilangan niitä osia, jotka yhdistävät tunkin vastakkaiset kärjet (vrt. Nevanlinnan täydentämisajatus edellä), tunkin lävistäjiksi. Saamme silloin muotoiltua lisäksi havaintouskomuksen, että mainittu leikkauspiste jakaa tunkin muuttuvamittaiset lävistäjät yhtä pitkiin osiin.

Voisimme nimittää tässä vaiheessa sellaista nelikulmiota, jonka sivut ovat yhtä pitkät vaikkapa *tasanelikulmioksi* (välttämällä vielä nimitystä *neljäkäs*).



Kokoamme seuraavaan kuvaan nyt tehtyjä havaintoja (kuva 2). Olemme käyttäneet siinä jo hiukan ennakoiden tyypillisiä geometrisia merkintätapoja ja abstrahointeja ja täydentämissiä.



Kuva 2: Pelkistettyä koostetta tasanelikulmioksi ABCD abstrahoidusta tunkista tehdyistä alustavista havaintouskomuksista:  $AB \parallel DC$ ,  $BC \parallel AD$ ;  $\angle A = \angle C$ ,  $\angle D = \angle B$ ;  $CA \perp DB$ ;  $MC = MA$  ja  $MD = MB$ .

## KOLMIOIDEN YHTENEVYYSOPPI JA SEN ROOLI TODISTAMISESSA

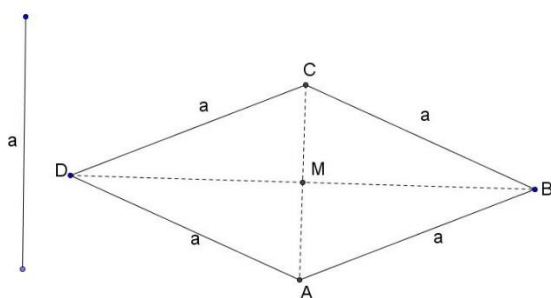
Kuva 2 esittää havaintojamme geometrian tyypillisiä ilmaisutapoja käyttäen (merkintöjen tarvetta ja hyödyllisyyttä ylipäättään on mahdollista lähestyä esimerkiksi sosiokonstruktivistisen keskusteluprosessin kautta). Käsittelemme ensimmäiseksi kysymystä tasanelikulmion lävistäjien kohtaamisesta. Saimme edellä havaintoja ja kokemusaineistoa, jonka mukaan ne näyttäisivät leikkaavan toisensa aina kohtisuorasti. Geometriassa (eli "näkemysvaruudessa") tämän tyyppiset asiat on tapana perustella lähinnä kolmioiden ns. yhtenevyysslauseiden avulla. Niihin viitataan tavallisesti käyttämällä lyhennysmerkintöjä sks, sss, ksk, kks ja ssk.

Kolmioiden ABC ja  $A'B'C'$  yhtenevyys (merkitään  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ) määritellään siten, että  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C'$ ,  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$  ja  $\angle C = \angle C'$  (sekä janojen että kulmien välillä pitäisi oikeastaan käyttää merkintöjä  $AB \cong A'B'$ , jne.; vrt. esim. Lehtinen ym. 2007, 23). Esimerkiksi yhtenevyysslauseen sks käyttötapana on tämä: jos tiedämme kolmioista ABC ja  $A'B'C'$ , että  $AC = A'C'$ ,  $\angle A = \angle A'$  ja  $AB = A'B'$ , pätee myös, että  $BC = B'C'$ ,  $\angle B = \angle B'$  ja  $\angle C = \angle C'$ , ts. silloin  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  (sks).

Hahmottelemme nyt tyypillistä *todistusta* koskien havaintouskomustamme nelikulmiomme lävistäjien kohtaamisesta. Käytämme tavanomaista (geometria-tieteen) skeemaa *lause*, *oletus*, *väitös* ja *todistus* (vrt. esim. Lehtinen ym. 2007, 143):

**Lause 1.** Tasanelikulmion lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti.

**Oletus.** Olkoot nelikulmion kärkipisteet A, B, C ja D,  $AB = BC = CD = DA$ , ja olkoon lävistäjien AC ja BD leikkauspiste M (ks. ao. kuva):



**Väitös.**  $AC \perp BD$ .

**Todistus.**  $\triangle DBC \cong \triangle DBA$  (sss;  $DC = DA$ ,  $BC = BA$ ,  $DB$  yhteinen), joten yhtenevien kolmioiden vastinkulmina  $\angle CBD = \angle ABD$  (ja  $\angle CDB = \angle ADB$ ). Näin  $\triangle ABM \cong \triangle CBM$  (sks), joten vastinosina  $\angle BMC = \angle BMA$ . Koska yhdessä nämä kulmat muodostavat oikokulman, on  $\angle BMC =$  suora kulma ( $= \angle BMA$ ), joten  $AC \perp BD$ .

Tarkastelemme nyt todistustamme. Lauseemme 1 voidaan esittää myös jos-niin-muodossa: Jos nelikulmio on tasanelikulmio, niin sen lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti. Oletus-vaiheessa otimme käyttöön merkintöjä, joiden avulla lauseemme "jos-osa" saatiin uudestaan ilmaistua; lisäksi nimesimme lävistäjien leikkauspisteen sekä piirsimme tilannetta havainnollistavan kuvan. Väitös-osassa lauseemme "niin-osa" ilmaistiin ytimekkään lyhyesti käyttöön otettujen merkintöjen sekä kuvan avulla. Todistus-osiossa vetosimme kolmioiden yhtenevyyslauseisiin sss ja sks ja saimme näitä soveltamalla (ns. vastinosia käyttämällä) todistuksen päätökseen lauseellemme. Vai saimmeko?

Todistaminen matematiikassa liittyy olennaisesti aksiomaattiseen menettelyyn, jota koulussa esimerkiksi geometriassa tuskin on mahdollista kovin syvällisesti tutkia. Toisaalta, jos vaikkapa kolmioiden yhtenevyyslauseet esitetään luettelomaisesti ja pinnallisesti (vrt. esim. Lehtinen 2007) – ja sitten niiden avulla harjoitellaan todistamista – ollaan lähellä hokkuspokkus-temppuilua.

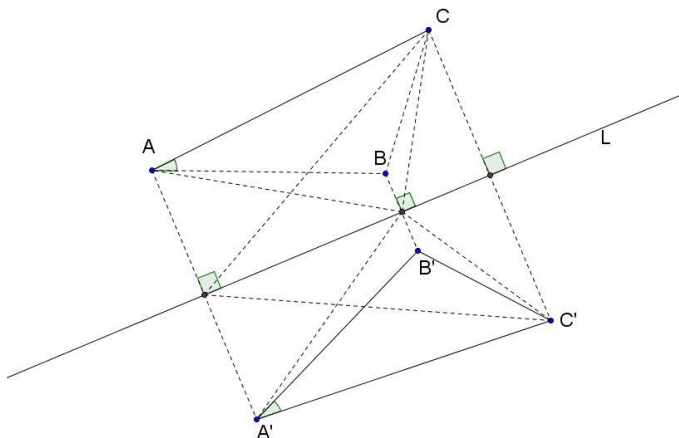
Sekin voi olla opiskelijaa hämäävää, että puhutaan yhtenevyyslauseista, mikä luo kenties odotuksen (ainakin joillekin) niiden todistamisesta (vrt. esim. *Pythagoraan lause*). Opettaja on kolmioiden yhtenevyysopin kohdalla kiintoisan pedagogisen ongelman edessä jo siinä, että miten hänen tulisi ottaa kolmioiden yhtenevyyslauseet käyttöön.

Aikoinaan geometriassa kolmioiden yhtenevyyslauseita tutkittiin geometrisina konstruktio-ongelmina (esim. Väisälä 1965, 35 - 40). Lauseiden ymmärtämisen kannalta tällainen lieene edelleen harkinnanarvoinen menettely, mutta myös esimerkiksi mehopillimallien (tms.) käyttö voisi toimia. Ymmärtämisen apuna voi luonnollisesti pyrkiä käyttämään myös "päällekkäin asettelun mallia" (vrt. esim. Väisälä 1965, 29; Silfverberg, Viilo, Pippola 1997, 96). Opettajan on hyvä hieman perehtyä aksiomaattiseen geometriaan, jotta ainakin hän näkisi, kuinka

noita lauseita silloin käsitellään ja jotta hänelle jäisi omaa pedagogista harkintavalttaa enemmän.

Teoksessa *Johdatus tasogeometriaan* (Lehtinen ym. 2007) otetaan sks aksioomaksi. Sen avulla *todistetaan* sitten esimerkiksi *Pons asinorum*: tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Sitten todistetaan sss. Yhtenevyyslauseet ksk, kks ja ssk jätetään tuossa kirjassa harjoitustehtäviksi.

Opettajan aineentuntemuksen kannalta olisi huomionarvoista, että yleisen yhtenevyyskuvauksen  $f$  määrittely ("euklidiselta tasolta euklidiselle tasolle" siten, että kaikille janoille on  $AB \cong f(A)f(B)$ , kaikille kulmille on  $\angle BAC \cong \angle f(B)f(A)f(C)$ ), saa selvästi inspiraationsa kolmioiden yhtenevyyskäsitteestä (vrt. esim. Lehtinen ym. 2007, 85). Koulussa tarkastellaan peilauksia, kiertoja ja siirtoja, osin jo vuosiluokilla 1 - 2 (POPS 2004). Sen osoittamisessa, että nämä kuvaukset ovat yhtenevyyskuvauksia  $f$ , tarvitaan kolmioiden yhtenevyysoppia. Seuraavassa kuvassa (kuva 3) on tarkasteltu esimerkkinä janan ( $AC$ ) ja kulman ( $\angle CAB$ ) kuvautumista peilauksessa suoran ( $L$ ) suhteen:



Kuva 3: Affordanssi, kuinka yhtenevyyslauseita sks ja sss käyttäen saadaan osoitettua peilaus suoran suhteen yhtenevyyskuvaukseksi. On siis osoitettava, että mielivaltainen jana  $AC \cong A'C'$  ja mielivaltainen kulma  $\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ . Suoran  $L$  pisteet ovat kuvauksen kiintopisteitä.

## LISÄÄ TODISTUKSIA KUVAN 2 POHJALTA JA NIIDEN TARKASTELUJA

**Lause 2.** Tasanelikulmion lävistäjät puolittavat toisensa.

**Oletus.** Olkoot tasanelikulmion kärkipisteet  $A, B, C$  ja  $D$ , ja lävistäjien  $AC$  ja  $BD$  leikkauspiste  $M$ .

**Väitös.**  $MA = MC$  ja  $MB = MD$  (ks. lauseen 1 todistuksen yhteydessä esitetty kuva).

**Todistus.** Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret (*Pons asinorum*), joten  $\angle CDM = \angle CBM$ , lauseen 1 perusteella  $\angle DMC = \angle BMC$ ; näin  $\triangle DMC \cong \triangle$

BMC (kks), joten vastinosina  $MB = MD$ . Vastaavasti osoitetaan, että  $\triangle ADM \cong \triangle CDM$  (kks), mistä seuraa, että  $MA = MC$ .

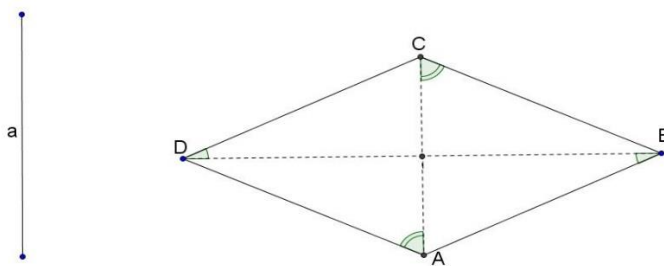
Jos todistus lauseelle 2 tehdään kuten yllä, vedotaan kolmioiden yhtenevyyslauseeseen kks. Todistelun toimivuus on tietysti ongelmallinen, jos lausetta kks ei ole todistettu (mikä voidaan tehdä, vrt. esim. Lehtinen ym. 2007, 30). Jos emme hyödynnä tasakylkisen kolmion kantakulmien yhtäsuuruutta, niin kolmioiden DMC ja BMC yhtenevyys voitaisiin perustaa lauseeseen ssk:  $DC = BC$ ,  $CM$  yhteinen,  $\angle DMC = \angle BMC$ . Tunnetusti ssk:n käyttö vaatii ns. lisäehdon tarkastelua eli tässä tapauksessa pitäisi pystyä vielä sanomaan, että sivua  $MC$  vastaavat kulmat D ja B ovat "samaa tyyppiä" (mikä kyllä onnistuu).

Tämä esitys ei ole geometrian oppitunti. Ilman muutaman tyypilliseen todistuksen auki kirjoittamista emme kuitenkaan pysty pureutumaan todistamiseen pedagogisena kysymyksenä. Jo tässä vaiheessa on syytä todeta, että tunkkimme/tasanelikulmiomme inspiroimia todistustilanteita olisi hyvä lähestyä myös siten, että niillä synnytetään ensi sijaisesti *tarve* yhtenevyyslauseisiin. Luonnollisesti itse todistaminen pitäisi samoin saada näyttämään tarpeelliselta – esimerkiksi siltä kannalta, että "tunkki todella toimii". Vielä yksi näyte sellaisesta.

**Lause 3.** Tasanelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset.

**Oletus.** Olkoot tasanelikulmion kärkipisteet A, B, C ja D.

**Väitös.**  $AB \parallel CD$  ja  $BC \parallel DA$ .



**Todistus.**  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$  (sss), mistä seuraa, että  $\angle BCA = \angle DAC$ ; vastaavasti  $\triangle BDA \cong \triangle DBC$  (sss), joten  $\angle DBA = \angle BDC$ . Siis  $AB \parallel CD$  ja  $BC \parallel DA$ .

Tarkastellaan hieman Lauseen 3 todistusta. Siinä tarvitaan kolmioiden yhtenevyyttä, mutta myös mielenkiintoista, ns. samankohtaisten kulmien lausetta: *Jos suora leikkaa kahta suoraa siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin leikatut suorat ovat yhdensuuntaiset.* Koulugeometriassa tämä – usein käytetty – lause otetaan tyypillisesti käyttöön "annettuna totuutena", samoin sen *käänteislause* – usein käytetty sekin: *Jos suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria.* Todistamisen kannalta tämäkin on tietysti ongelmallista. Opettajan olisi hyvä vilkaista sopivaa lähdettä (esim. Lehtinen ym. 2007, 30 - 32), jotta ainakin hän tiedostaisi, millaisia käsitteitä noiden lauseiden todistaminen vaatii. Varsinkin siksi, että Eukleideen geometrian salape-

räinen *paralleeliaksioma* on tuolloin olennaisessa roolissa – ja se sentään useimmiten oppikirjoissa esitellään.

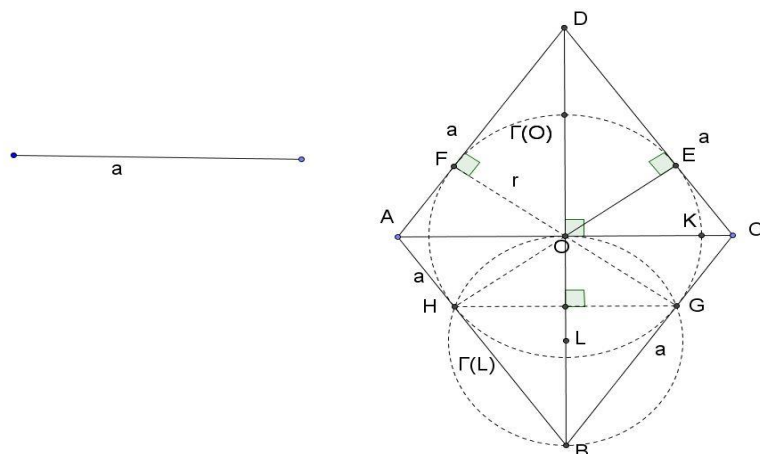
Siellä, missä samankohkaisia kulmia ja suorien yhdensuuntaisuutta koskevia lauseita koulumatematiikassa käytetään, käytetään usein myös (todistamatta) ns. ristikulmalauseetta: *ristikulmat ovat yhtä suuret*. Lähteestä (Lehtinen ym. 2007, 24) löytyy tämän lauseen todistus käyttämällä ns. vieruskulmalauseetta: *yhtenevien kulmien vieruskulmat ovat yhtenevät*. Mutta tämän jälkeen reduktio saadaan jo päättymään, koska vieruskulmalause todistetaan kolmioiden yhtenevyyslauseen/-aksioman sks avulla. Opettajalle tämä voisi olla huomionarvoista esimerkiksi ”kvasiaksiomaattisen menettelyn” näkökulmasta – mitä mahdollisuutta koulumatematiikassa on joiltakin tahoilta haluttu korostaa (Lehtinen ym. 2007, 141).

## VIELÄ HAVAINTOJA TASANELIKULMIOSTA

Voimme asettaa tunkin/tasanelikulmion lävistäjien leikkauspisteestä kohtisuorat janat (tai niiden jotkut fyysiset vastineet) nelikulmion sivuille. On ilmeistä, että näin muodostetut neljä etäisyyttä ovat samat, mikä luo ajatusmahdollisuuden asettaa tasanelikulmion sisään ympyrä, joka sivuaa kaikkia nelikulmion sivuja. Toisaalta nämä kohtisuorat voi ajatella jonkinlaisina tukirakennelmina, jos ollaan tekemässä vaikkapa nelikulmiomme muotoista leijaa. Varsinaisesti leijamaisia muotoja näyttää syntyvän samalla nelikulmiomme sisään muutenkin.

Tasanelikulmion lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, ja nelikulmiomme jakautuu silloin neljään yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Näiden kolmioiden hypotenuusina ovat nelikulmiomme sivut ja kateetteina lävistäjien puolikkaat. Nelikulmiomme sisään ajatellun ympyrän keskipisteestä (lävistäjän leikkauspisteestä) nelikulmion sivuille asetetut ympyrän säteet jakavat edelleen kunkin näistä suorakulmaisista kolmioista kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Kaikki näin syntyvät kolmiot ovat keskenään *yhdenmuotoiset*.

Luetteloa kiintoisista havainnoista (kuva 4) voisi jatkaa. Tasanelikulmiosta ABCD löytyy leijoja, suorakulmaisista kolmioita, nuolia, yhdenmuotoisuutta, yhtenevyyttä, sisään piirretty ympyrä  $\Gamma(O)$ , nelikulmion ympäri piirretty ympyrä  $\Gamma(L)$ , symmetriaa, peilaamista suoran ja pisteen suhteen, ympyrän tangentti jne.



Kuva 4: Lisää ominaisuuksia tasanelikulmiosta ABCD.

Käsitlemme tässä vain hieman yhdenmuotoisuutta. Pedagogiset ratkaisut *yhdenmuotoisuuden opettamisessa* ovat tunnetusti monenlaisia, mutta joitakin asioita ainakin opettajan on hyvä tiedostaa. Arviomme mukaan tässäkin jo usein käyttämämme aksiomaattisen geometrian esitys (Lehtinen ym. 2007) olisi vähintään silmäilyn arvoinen.

Siellä määritellään tietyllä konstruktiiivisella tavalla janojen kertolasku ja osoitetaan siten saatu struktuuri Abelin ryhmäksi (ja vähän enemmänkin), ts. esimerkiksi janojen jakolasku on silloin tehtävissä. Janojen pituuksista ei silloin tarvitse paljon puhua, yksikköjanan käyttöönotto riittää. Tämän jälkeen esitetään (määritellään) kolmioiden ABC ja  $A'B'C'$  yhdenmuotoisuuden vaatimukset:  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$ ,  $\angle C = \angle C'$  ja  $a/a' = b/b' = c/c'$  sekä otetaan käyttöön merkintä  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

Sitten tapahtuu koulumaaailman kannalta erityisen mielenkiintoista. Koulussa eniten käytettävä yhdenmuotoisuuslause kk todistetaan, ts. osoitetaan, että oletuksista  $\angle A = \angle A'$ ,  $\angle B = \angle B'$  todella seuraa, että  $\angle C = \angle C'$  ja  $a/a' = b/b' = c/c'$ . Todistuksessa tarvitaan jana-aritmetiikan ohella kolmioiden *yhtenevyyslausetta* kks. Siis vaikka toisaalta voidaan sanoa, että kolmioiden yhtenevyys on erikoistapaus kolmioiden yhdenmuotoisuudesta, ei yhdenmuotoisuudenkaan kohdalla voida (pitäisi) välttää yhtenevyysoppia. Kuvassa 4 esimerkiksi  $\triangle DEO \sim \triangle OEC$  (kk).

Emme enempää tutki Kuvassa 4 lueteltuja havaintoja, vaan jätämme ne lukijalle, eli hän voi jatkaa merkitysnarratiiviamme. Erityisesti kehotamme lukijaamme konstruoidaan *kultaisen tasanelikulmion*, ts. tasanelikulmion, jossa sivun suhde (vaakasuoraan) lävistäjään = kultainen suhde. Tällä nelikulmiolla on lukuisasti kiintoisia piirteitä esimerkiksi trigonometrian, säännöllisten 5- ja 10-kulmioiden konstruktoiden sekä Penrosen laatoituksen (vrt. Penrose 1990, 132 -138; 434 - 437) kannalta.

## LÄHTEET

- Lehtinen, M. (2007). Viisi lukion geometrian oppikirjaa. Solmu-lehti 2/2007, <http://matematiikkalehtisolmu.fi/2007/2/geomkirjat.pdf>.
- Lehtinen, M., Merikoski, J., Tossavainen, T. (2007). Johdatus tasogeometriaan. Porvoo, Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.
- LOPS (2004). Lukion opetussuunnitelman perusteet. Opetushallitus.
- Nevanlinna, R. (1964). Suhteellisuusteorian periaatteet. Toinen painos. Porvoo: WSOY.
- Nevanlinna, R. (1971). Matematiikan keskeisistä probleemeista. Teoksessa Logiikka ja matematiikka. Julkaisijat DILEMMA ry ja LIMES ry. Porvoo, Helsinki: WSOY, 99 - 122.
- Niiniluoto, I. (1980). Johdatus tieteenfilosofiaan. Käsitteen- ja teorianmuodostus. Keuruu: OTAVA.
- Pehkonen, E. (1989). Oppilasaktiviteetteja peruskoulun geometriaan. Käsikirja opettajille toiminnallisesta matematiikasta. Porvoo: WSOY.
- Penrose, R. (1990). The Emperor's New Mind. Concerning Computers, Minds, and The Laws of Physics. Foreword by Martin Gardner. Oxford: University Press.
- Polya, G. (1973a). How To Solve It. A New Aspect of Mathematical Method. Second Edition. Princeton: University Press.
- Polya, G. (1973b). Induction and Analogy in Mathematics. Eighth Printing. Princeton: University Press.
- Polya, G. (1980). Mathematical Discovery. On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving. Combined Edition. New York: John Wiley & Sons.
- POPS (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. Opetushallitus.
- Silfverberg, H., Viilo, M-L., Pippola, L. (1997) Matematiikan Taito 3. Geometria. Lukion pitkä matematiikka. Porvoo: WSOY.
- Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Acta Universitatis Tamperensis; 710, Tampere University Press, Tampere.
- Yrjänäinen, S. (2011). "Onks' meistä tähän" Aineenopettajakoulutus ja aineenopettajaopiskelijan toiminnallinen osaaminen. Acta Universitatis Tamperensis; 1586, Tampere University Press, Tampere.
- Yrjänäinen, S, Ropo, E. (2013). Narratiivisesta opetuksesta narratiiviseen oppimiseen. Teoksessa Ropo Eero, Huttunen Maiju (toim.) Puheenvuoroja narratiivisuudesta opetuksessa ja oppimisessa. Tampere, Tampere University Press, 17 - 46.





## FLIPPED LEARNING –APPROACH IN MATHEMATICS TEACHING – A THEORETICAL POINT OF VIEW

Marika Toivola & Harry Silfverberg

University of Turku

*Flipped learning (FL) in mathematics has recently attracted considerable interest around the world. Even though the manner in which each teacher actually flips the teaching and learning process of mathematics in his or her own classes varies, FL does require the teacher to reassess his or her pedagogical habits and beliefs. FL raises the question of whether humanist perspectives, such as freedom, dignity, and potential of humans, should have a higher profile in teaching and students' learning in mathematics. The main aim of this paper is to elicit fresh understandings about the culture of FL and to consider it as a pedagogical approach in mathematics via general theoretical point of view offered by the learning and motivation theories.*

### INTRODUCTION

Currently, two slightly different didactical approaches, *flipped/inverted classroom* (Bishop & Verleger, 2013; Lage, Platt, & Treglia, 2000; Talbert, 2014) and *flipped learning* (Yarbro, Arfstrom, McKnight, & McKnight, 2014) seem to be attracting many mathematics teachers who are trying to change the traditional and passive learning culture of mathematics to a more student-centered and active way to study the subject. The movement has its background in the very practical development projects of school. As a consequence, present discussions have focused mainly on the practical implementation of the methods (Davies, Dean, & Ball, 2013; Mason, Shuman, & Cook, 2013) and there has been lack of interest in the methods' pedagogical assumptions and their theoretical reasons. The main aim of this study is to open discussion for FL context ideology and values and to emphasize the difference between FC- and FL-approaches.

Conceptually, the notions of the flipped/inverted classroom (FC) and flipped learning (FL) are quite close to each other. For both of them, the epithet "flipped" or "inverted" refers to the fact that FC and FL models invert or "flip" the usual classroom design where class time is typically spent on information transfer usually through lecturing, while the most higher-order tasks are done as homework, and consequently outside the classroom activity.

In this article, FC indicates a teaching method or technical change in traditional teaching, whereas FL does not flip only teachers' and students' action in the class but also their pedagogical assumptions about teaching and learning. FL is a learning culture (Yarbro et al., 2014) which promotes students' autonomy and collaborative learning, and where learning support and guidance better meet the needs of individual learners (Foertsch, Moses, Strikwerda, & Litzkow, 2002;

Moore, Gillett, & Steele, 2014). In Figure 1, based on the nature of scaffolding, collaboration and the increase in students' autonomy we positioned traditional teaching, FC and FL in a continuum from direct teaching to learner-centered learning. With learner-centered learning, we refer to Tangney's (2014) board view about situation which concentrates not only on constructivist but also on humanist elements such as personal growth, consciousness raising and empowerment. In FL, the teacher dares to give up direct control of the learning situation and trusts students' ability and desire to learn. Further, with FL the teacher may reject the passive student's illusion about learning via overly active teachers. In contrast, in FC the teachers still want to decide and control by themselves what will happen in the classroom and the time of learning. We will discuss the nature of collaboration and scaffolding later in this paper.

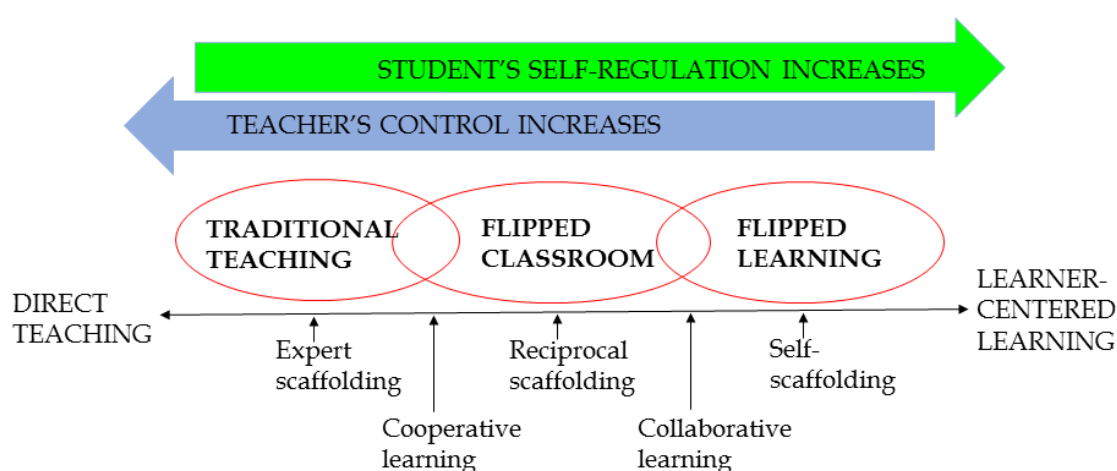


Figure 1: The dimensional view of the changes when switching from direct teaching to learner-centered learning.

The first author of this article started to use flipped learning herself at the upper secondary school level in 2012. Gradually, the impression was that most of her students started to believe more in themselves, got better results and began to enjoy learning math. Her students seemed not only to have an increased tolerance for, but also a desire for collaboration. Quoting Strayer (2012): "Students in the inverted classroom exhibited a desire to want to explain concepts to other students, feeling as though this is the best way to learn something thoroughly. ... Significantly, fewer students in the traditional class mentioned group learning when reflecting on what a successful course would be like." The purpose of this article is to offer theoretically justifiable reasons why students need collaboration and why it seems to have such a positive impact on their attitude towards math. Until now, teachers who have experimented with FL have consistently seen positive results in increased motivation and self-regulated learning amongst their students. The question is still why and under what conditions FL works. After strengthening our theoretical understanding about why FL

seems to be functioning so well we can also understand better what is central in the approach to what we are trying to achieve by applying it. That would also help teachers as well as researchers to focus their efforts on the most important elements of FL.

## **PROMOTING STUDENTS' SELF-REGULATED LEARNING AND AUTONOMY**

Many teachers have realized that flipping the usual classroom design (FC) is not enough. For example, some of the students do not want to watch videos which in fact are usually only direct teaching situations that have been pre-recorded. Instead, students have started to believe in themselves as learners of mathematics and want to take control of their learning by themselves. As students are allowed to take more control and responsibility of their own learning they also learn to better self-regulate. According to Strayer (2012) students in FL-classes are more aware of their learning process than students in traditional classes which is the first requirement for self-regulation. Self-regulation in learning and students' intrinsic motivation seem to increase when students have an opportunity to decide when they need personal guidance, encouraging feedback or non-authoritarian cooperation (Deci & Ryan, 1985; 2000). As Koro (1993) has noted, learning to self-regulate the learning process does not depend merely on the teaching method, but is connected also with the teacher's conception of humanity and his or her perception of the student as a person. To be a self-regulated learner the student must have a psychological need for *autonomy*, competence, and relatedness (Stefanou, Perencevich, DiCintio, & Turner, 2004).

Self-regulated learning is not learning in isolation or alone; instead, it often requires solidarity, community, and dialogue. The significance of others in the development of self-regulation is explicit in the seminal works of both Piaget and Vygotsky. Further, each self-directed learner is an invaluable learning resource for other learners in the community. McCaslin (2009) as well as Volet et al. (2009) also highlight the significance of the individual's metacognitive and scaffolded experiences in social systems and use the term *coregulation* to illustrate a transitional process in the development of self-regulation. In coregulation, the focus is not on the achievement of explicit individual or collective goals even though those would support self-regulation. Instead, the aim is productive coparticipation in a social activity and individual development a broad sense (Volet et al., 2009).

The concept of autonomy is closely linked to the concept of self-regulation, but the phenomenon of autonomy is broader (Koro, 1993). According to Deci and Ryan (1985), autonomy can be defined as an action, which is chosen and which one is responsible for. Students who are overly controlled by the teacher not only lose initiative, but also learn less. The general picture of supporting autonomy of learning is often too limited. In practice, many teachers erroneously

consider support for autonomy and the freedom of choice as synonyms. They allow students to make choices only in matters unimportant for regulating the learning process, and want to prevent them from making pedagogically poor choices. Stefanou et al. (2004) suggest autonomy is better thought of as including scattered *cognitive choices*, as well as *organizational* and *procedural choices*. Organizational and procedural choices may be necessary but not sufficient conditions for deep-level student engagement in learning. To be an autonomous learner, the student should be the leader, designer and implementer of the learning process. Stefanou et al. (2004), as well as Ben-Zvi and Sfard (2007), emphasize the importance of collaboration and the need to follow in experts' footsteps to achieve learning autonomy. The students' control of their learning should be understood as a form of command over different forms of interaction with others.

However, we have to keep in mind that guiding students to become autonomous learners is not an easy or fast task. Even though many teachers are satisfied with increasing self-regulated learning in a FL-context, others still struggle with how to best help students achieve self-regulation in their learning. For example, Demetry (2010) noticed that 10-15 % of the students did not work actively on problems in FL. That still suggests that an impressive 85-90 % of the students did. Students are using their time more effectively for learning in class which has led to many students reporting that they are having to spend less time studying math at home compared to a traditional classroom structure (Mason et al., 2013; Moore et al., 2014).

## DECONTROLLING STUDENT'S ZONE OF PROXIMAL DEVELOPMENT

In the traditional way of teaching it is very common that the teacher will choose the level of teaching based on his or her conceptions of the average skill level of the group. However, already almost a half century ago Bloom (1968) argued that the level determined by the teacher will be poorly fit to most of the students. In FL, the differentiation in the learning does not require any additional resources or a reduction in the size of the group, because the students differentiate their own styles and goals of learning themselves and the teacher would not be the one who forms the groups of different skill levels of the students. The students simply have the possibility to start to learn from a level which is best fitting their own *zone of proximal development* (ZPD) at the moment.

However, the quality of the students' ZPD does depend on the teacher (Blanton, Westbrook, & Carter, 2005; Valsiner, 1997). In his theory, Jaan Valsiner expands the ZPD to include two additional zones of interaction: the *zone of free movement* (ZFM) and the *zone of promoted action* (ZPA). ZFM is a socio-culturally determined function of what the students are allowed by the teacher and not prohibited by the learning culture they have engaged. ZPA, instead, defines a set of

activities, objects, or areas in the environment by which the teacher attempts to persuade students to act in a certain way.

Figure 2 illustrates the different roles which ZPD, ZFM and ZPA have in a typical traditional teaching and in a FL approach. The figure representing traditional teaching is similar to that made by Oerter (1992). There ZPA is a part of ZFM because the students can only promote (ZPA) what is at least allowed (ZFM). Additionally, in Oerter's illustration ZPD cannot be fully contained within ZFM. If the teacher promotes a particular action some others are naturally excluded, for example the students cannot scaffold each other if the teacher allows only individual seatwork.

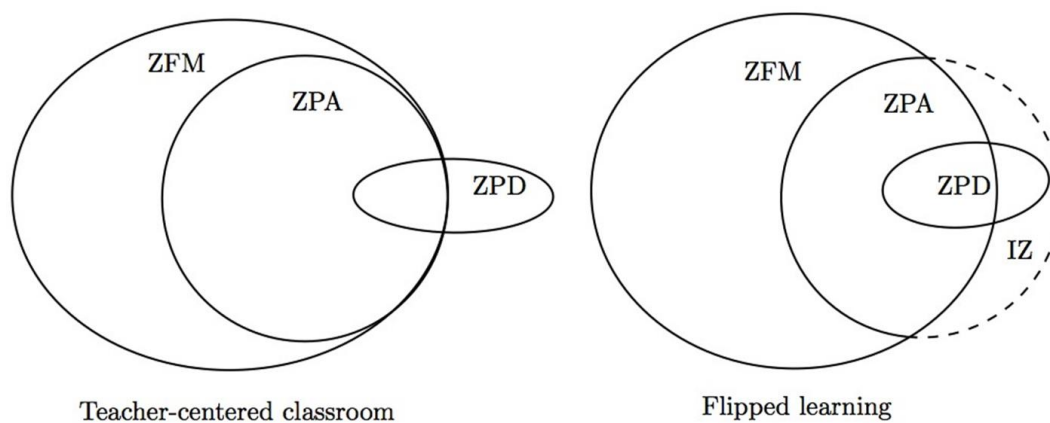


Figure 2: The zone of proximal development (ZPD), the zone of free movement (ZFM) and the zone of promoted action (ZPA) in a traditional teaching context (adapted from Oerter (1992)) and in a flipped learning context (the authors' interpretation by exploiting Blanton's et al. (2005) illusionary zone of promoted action (IZ)).

On the contrary, in the FL-approach the potential of students' development is better used because of students' increased autonomy. However, there still might be some actions that are not allowed, for example because of school policies. Even though the curriculum defines what kind of school subjects students should learn, the curriculum does not define the methods by which students should learn. FL allows for students to take advantage of various didactical approaches depending on their own strengths, weaknesses, and learning styles. For example, although videos are not at the center of FL (Johnson, 2013) in some cases they can be excellent in promoting ZPA and the differentiating of learning. The students can watch them several times, whenever they choose, and skip the parts they already know (Davies et al., 2013; Goodwin & Miller, 2013; Mason et al., 2013). However, the teacher should not prioritize videos over reading theory which would intentionally narrow students' ZFM. Videos are still presenting to students the teacher's way of thinking.

The *illusionary zone of promoted action* (IZ) launched by Blanton's et al. (2005) illustrates what the teacher appeared to promote but in fact does not allow. IZ can be understood like Blanton et al. as a diagnostic tool for visualizing the teacher's own ZPD and his or her potential to develop the learning culture (students' ZFM and ZPA) to meet the needs of individuals better. However, we argue that IZ can be also understood as a zone which students can achieve without the teacher's promotion. Students' spontaneous performance should not be underestimated, especially in situations where a student has had little success with a specific school subject and has suffered lack of appropriate ZPD.

The benefits of flipping have recently gained prominence due to advances in technology that have provided enriched resources for all students (Davies et al., 2013). However, we argue that videos might be even more important to the teacher than to the students. They give the teacher the freedom to try a new learning culture because the lectures are still available if the students want them.

### **SUPPORTING SELF- AND RECIPROCAL SCAFFOLDING**

FL has raised the basic tenants of *mastery learning* (Bloom, 1968; Carrol, 1963) by re-considering and evaluating processes; especially, when *self-paced learning* and *scaffolding* are placed at the center of the learning culture. The aim of scaffolding is to provide a metaphorical bridge between the social and the personal. In FL, scaffolding should not be seen only as an act to support the immediate construction of knowledge but also to support the future independent learning of the individual.

Holton and Clarke (2006) classified scaffolding into three types: expert scaffolding, reciprocal scaffolding, and self-scaffolding that operate in two scaffolding domains: conceptual scaffolding and a heuristic one. In FL, 'concept' refers to mathematical content and 'heuristic' approaches that may be taken. The *expert scaffolding* involves a scaffolder with specific responsibility for the learning of others and can be seen as a role of teacher. However in FL, the teacher may even prefer heuristic scaffolding instead of a conceptual one to support the long term goal of learner independence. Situations of *reciprocal scaffolding* take place where students are involved in working collaboratively. *Self-scaffolding* can be seen as a form of internalized conversation where the students negotiate their epistemic self. Self-scaffolders are aware of, what they know in terms of content knowledge, heuristic knowledge and learning styles. Holton and Clarke see self-scaffolding equivalent to metacognition. Within commognitive perspective, Ben-zvi and Sfard (2007) highlight also the significance of others in a process of *scaffolded individualization*. This unique form of thinking develops when a student turns the discourse-for-others to a discourse-for-oneself.

## ASSERTING COLLABORATION AND MATHEMATICAL IDENTITY

The FC has been criticized for the fact that students cannot ask the teacher for help at the time when they are exploring a new issue. However, according to many teachers, students do not ask questions when listening to instruction, but rather when they begin to apply what they have been taught (Foertsch et al., 2002). In heterogeneous small groups, which consist of friends, it is an advantage that quicker learners spontaneously advise their friends in which case the know-how of the “teacher” as well as the one taught is increased. Furthermore, social skills are learned at the same time. Moore et al. (2014) found that students in the FC interacted more with each other than students in traditional classrooms, and took more responsibility for their learning. Even students who would previously just wait for answers to their homework were more willing to ask for help and to contribute key mathematical ideas in the new learning culture. However, with FL, because there are no common assignments to be done at home, students can approach new material in class if it is more useful for their learning.

It is clear that collaboration is an important factor in FL but what kind of collaboration? With *collaborative learning*, we mean in this article primarily the culture of learning. It is a shared learning situation in which two or more people learn or attempt to learn something together (Dillenbourg, 1999). In contrast, *cooperative learning* focuses on a common or final output. FL emphasizes collaborative learning over cooperative learning. The goal of FL is actually the learning process itself, not the final product. In FL students need collaboration not only to succeed in specific exercises but also to practice their *conceptual thinking* (Kazemi & Stipek, 2001) and increase their *mathematical identity* (Anderson, 2007). A central but quite often neglected goal in mathematics education is to let students express their own mathematical thinking. Traditional teaching offers a chance only to a few students to discuss mathematical problems, and usually only with the teacher’s permission. Learning to use mathematics as a language is commonly based on imitating the teacher. However, as with learning any foreign language, learning based solely on imitating does not seem to be enough to achieve the active skills of the language (Silfverberg, Portaankorva-Koivisto, & Yrjänäinen, 2005). When students explain their problem-solving processes, it develops their problem-solving strategies, and their metacognitive awareness of what they do and do not understand. Discussion leads to a deeper understanding and has a positive impact on the quality and quantity of learning (Webb et al., 2009). Vidakovic and Martin (2004) as well as Gupta (2008) remind us that by missing the opportunity for externalization, we limit internalization. If the students do not have a chance to explain their thoughts to someone else, they fail to solidify learning.

## DISCUSSION

The FL-method questions in many respects our idea of how mathematics should be studied. Moreover, in the approach the feelings are recognized as an important part of a learning process by offering the possibility to the students to see themselves as true learners of mathematics regardless of their level. Classroom conversations between the teacher and the students as well as among the students themselves are not only valuable to students' learning but also for the teacher by offering a window into the social process of students' self-regulation.

Even though the movement of FL has been developed from practical starting points rather than from educational theory, the target of flipped learning is closely linked to the classical research questions about education. We believe that a more accurate theoretical framework for the FL -concept is needed to help both teachers and researchers better understand what the main hypotheses and goals are of this effort to renew the learning cultures of mathematics. In the further studies, we have to pay more attention also to the teacher's role in acquainting students with the FL approach. There is no doubt that the theoretical framework for flipped learning is marketable for studies other than mathematics as well.

The paper belongs to a larger research project, from which the first author will also make her Ph.D. study.

## REFERENCES

- Anderson, R. (2007). Being a mathematics learner: Four faces of identity. *Mathematics Educator*, 17(1), 7-14.
- Ben-zvi, D., & Sfard, A. (2007). Ariadne's thread, Daedalus' wings and the learners autonomy. *Education & Didactique*, 1, 117-134.
- Bishop, J. L., & Verleger, M. A. (2013). The flipped classroom: A survey of the research. *120<sup>th</sup> ASEE Annual Conference & Exposition*, Atlanta.
- Blanton, M. L., Westbrook, S., & Carter, G. (2005). Using Valsiner's zone theory to interpret teaching practices in mathematics and science classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(1), 5-33.
- Bloom, B. S. (1968). Learning for mastery. *Evaluation Comment*, 1(2), 1-12.
- Carrol, J. (1963). A model of school learning. *Teachers College Record*, 64, 723-733.
- Davies, R., Dean, D., & Ball, N. (2013). Flipping the classroom and instructional technology integration in a college-level information systems spreadsheet course. *Educational Technology Research & Development*, 61(4), 563-580.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. New York: Springer.



- Demetry, C. (2010). *Work in progress - an innovation merging "classroom flip" and team-based learning*. 40 Th ASEE/IEEE Frontiers in Education Conference. Washington. 26-27.
- Dillenbourg, P. (1999). Introduction: What do you mean by "collaborative learning"? In P. Dillenbourg (Ed.), *Collaborative learning: Cognitive and computational approaches*. Amsterdam: Pergamon.
- Foertsch, J., Moses, G., Strikwerda, J., & Litzkow, M. (2002). Reversing the lecture/homework paradigm using eTEACH web-based streaming video software. *Journal of Engineering Education*, 91(3), 267-274.
- Goodwin, B., & Miller, K. (2013). Evidence on flipped classrooms is still coming in. *Educational Leadership*, 70(6), 78-80.
- Gupta, A. (2008). Constructivism and peer collaboration in elementary mathematics education: The connection to epistemology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 4(4), 381-386.
- Holton, D., & Clarke, D. (2006). Scaffolding and metacognition. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, 37(2), 127-143.
- Johnson, G. B. (2013). *Student perceptions of the flipped classroom*. Master of arts in the college of graduate studies. Educational technology. The University of British Columbia.
- Kazemi, E., & Stipek, D. (2001). Promoting conceptual thinking in four upper-elementary mathematics classrooms. *Elementary School Journal*, 102(1)
- Koro, J. (1993). *Aikuinen oman oppimisen ohjaajana*. Jyväskylä: Jyväskylän yliopisto.
- Lage, M. J., Platt, G. J., & Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, 31(1), 30-43.
- Mason, G. S., Shuman, T. R., & Cook, K. E. (2013). Comparing the effectiveness of an inverted classroom to a traditional classroom in an upper-division engineering course. *Education, IEEE Transactions On*, 56(4), 430-435.
- McCaslin, M. (2009). Co-regulation of student motivation and emergent identity. *Educational Psychologist*, 44, 137-146.
- Moore, A. J., Gillett, M. R., & Steele, M. D. (2014). Fostering student engagement with the flip. *Mathematics Teacher*, 107(6), 420-425.
- Oerter, R. (1992). The zone of proximal development for learning and teaching. In F. Oser, A. Dick & J. Patry (Eds.), *Effective and responsible teaching: The new synthesis* (pp. 187-202). San Francisco: Jossey-Bass.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, 25(1), 54-67.

- Silfverberg, H., Portaankorva-Koivisto, P., & Yrjänäinen, S. (2005). Matematiikka kielenä ja kielikasvatuksena. Mathematics as a language and as a language education. In L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (Eds.), *Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus*. Oulu: Oulun yliopisto
- Stefanou, C. R., Perencevich, K. C., DiCintio, M., & Turner, J. C. (2004). Supporting autonomy in the classroom: Ways teachers encourage decision making and ownership. *Educational Psychologist*, 39(2), 97-110.
- Strayer, J. (2012). How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. *Learning Environments Research*, 15(2), 171-193.
- Talbert, R. (2014). Inverting the linear algebra classroom. *PRIMUS. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 24(5), 361-374.
- Tangney, S. (2014). Student-centred learning: A humanist perspective. *Teaching in Higher Education*, 19(3), 266-275.
- Valsiner, J. (1997). *Culture and the development of children's actions. A theory of human development* (Second Edition ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Volet, S., Vauras, M., & Salonen, P. (2009). Self- and social regulation in learning contexts: An integrative Perspective. *Educational Psychologist*, Vol. 44(4), 215-226.
- Webb, N. M., Franke, M. L., De, T., Chan, A. G., Freund, D., Shein, P., & Melkonian, D. K. (2009). 'Explain to your partner': Teachers' instructional practices and students' dialogue in small groups. *Cambridge Journal of Education*, 39(1), 49-70.
- Yarbro, J., Arfstrom, K. M., McKnight, K. & McKnight, P. (2014). Extension of a review of flipped learning, Flipped learning network/Pearson/George Mason University. Retrieved from <http://flippedlearning.org/research>

## **TEACHERS' CONCERNS AND INTERESTS ABOUT TEACHING OF "RESPONSIBLE RESEARCH AND INNOVATION" - APPLYING THE CONCERNS-BASED ADOPTION MODEL**

Miikka de Vocht<sup>1</sup>, Antti Laherto<sup>1</sup> & Ilka Parchmann<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of Helsinki

<sup>2</sup> University of Kiel

*This study analyses the concerns of teachers by using the Stages of Concern-questionnaire of the Concerns-Based Adoption Model. Teachers participated in a professional development program, which searched for ways to incorporate ideas of Responsible Research and Innovation (RRI) into science teaching. Results of 68 teachers from 10 countries suggest that already in the beginning of an early engaging development program teachers have concerns and interests related to consequence, collaboration and refocusing of RRI teaching. The concern profile of the teachers in this study is similar to many other studies on educational innovations and teacher professional development. However, the results of the SoC-questionnaire do not satisfy the internal consistency analysis nor the factor analysis. The Stages of Concern questionnaire will be refined and applied again in a second round of a teacher professional development program called IRRESISTIBLE.*

### **INTRODUCTION AND BACKGROUND**

It is known that reforms in schools are unlikely to happen if teachers are not involved from the beginning of the reform process, and teachers' attitudes towards a learning innovation play a 'make-or-break' role in the success of that innovation (Anderson & Helms, 2001; van Driel, Beijaard, & Verloop, 2001). The same is true for many other organizations like companies, agencies or governments: A new innovation has to be adopted by the actors who actually implement it. Efforts have been made to describe the complex beliefs and attitudes of teachers while they go through an adoption process (Bailey & Palsha, 1992; Hall, Wallace Jr., & Dosset, 1973; Lumpe, Haney, & Czerniak, 2000).

This study analyses the concerns teachers face during the EU project IRRESISTIBLE (IRRESISTIBLE Description of Work, 2013), which aims to enhance students' and the public's understanding of Responsible Research and Innovation (RRI). Teachers from Finland, Germany, Greece, Israel, Italy, Netherlands, Poland, Portugal, Romania and Turkey, developed teaching modules containing cutting-edge science content with the help of science researchers, educational researchers and museum experts. The teaching modules were done in groups of teachers and experts called Communities of Learners (CoL), which were responsible for the development and implementation of teaching modules

on a variety of societally relevant and contemporary fields of science, like climate change, oceanography, nanoscience, renewable energy, food industry and genomics.

One of the most crucial tasks of the teachers was to implement aspects of socially relevant topics related to science and industry into the teaching modules, in a time period of 6 - 12 months. These topics come from an EU framework called Responsible Research and Innovation (RRI), which tries to answer the growing need to bridge the gap between scientific community and the rest of society. RRI has been developed since 2010, and consists of 6 key points (Table 1), which are implemented within IRRESISTIBLE explicitly or implicitly (Sutcliffe, 2011).

*Table 1: Key points of Responsible Research and Innovation (RRI) and their implementation in teaching*

|                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Engagement</b> to ‘choose together’: engagement of societal actors, such as researchers, industry, policy makers and civil society, for the dissemination of innovations and research.                       | Within IRRESISTIBLE, researchers work with students, teachers and science museum experts. School students are taught about the role of different societal actors. Local individuals are affected via science museum exhibits. |
| <b>Equality</b> to ‘unlock the full potential’: realising the full potential of individuals, regardless of their gender or background.                                                                          | Within IRRESISTIBLE, equality is taken into account in teaching methods as well as in teaching content. Students receive a realistic and diverse impression of scientists.                                                    |
| <b>Science Education</b> through ‘creative learning’: children’s interest in science education is one of the best ways to entice them to participate in future research and innovation.                         | IRRESISTIBLE uses teaching methods, such as inquiry-based learning, to promote interests in science equally.                                                                                                                  |
| <b>Open Access</b> ‘sharing to advance’: open access to publicly funded research publications and data must be granted, especially for those societal members who may distribute this information intelligibly. | Students are taught, for example, about the role of scientific information in society.                                                                                                                                        |
| <b>Ethics</b> as ‘doing the right thing’: ethics in research and innovation should be based on the shared values of European society.                                                                           | Teaching content includes ethical issues related to research, the effects of applications on health and the environment and the social acceptability of science.                                                              |

|                                                                                                                                          |                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| <b>Governance</b> such that ‘science is for and with society’: implementation of these key points should be conducted in a sensible way. | For example, students are allowed to ‘assume’ different roles in society. |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|

The aim of this study is to analyze teachers concerns and interests while they are adopting the above-mentioned RRI features into their teaching. A typical hypothesis is that in a successful adoption process teachers’ low level self- and task-centered concerns are resolved and substituted by higher level impact concerns, like refining the use of the teaching innovation (Hall et al., 1973).

The objective of this research is to analyze the concern profiles of teachers participating in IRRESISTIBLE. These profiles can be compared to other studies. The validity and reliability of the SoC-questionnaire is also discussed. This leads to the research question: What are the characteristics of concerns and interests that teachers face at an early phase of an engaging professional development project? This was measured using the Concerns-Based Adoption Model and the Stages of Concern (SoC) -instrument, which was refined to measure concerns specifically related to Responsible Research and Innovation. The reliability and validity is also under investigation, because there may be a need to develop the instrument further

### Concerns-Based Adoption Model

Teachers face many kinds of concerns when they are expected to adopt a new method or new content related to teaching. There might be concerns related to available resources, personal competence, consequences on students or support from colleagues. Concerns-Based Adoption Model (C-BAM) is a model for categorizing different kinds of concerns. The work of a teacher involves adopting and refining new teaching methods and the C-BAM model analyses this process. The idea is that teachers first focus on practical and personal concerns before they have a chance to focus on e.g. the development of the teaching method.

According to C-BAM concerns can be both negative (worries), neutral and positive (interest) and C-BAM tries to identify all of these across multiple categories. There are C-BAM models with different number of categories depending on desired specificity, but the categories are usually based on self-concerns, task concerns, and impact concerns (Bailey & Palsha, 1992; Hall, George, & Rutherford, 1977; Shoulders & Myers, 2011).

Self-concerns can relate for example to how consistent the teaching innovation is related to teacher’s own skills, knowledge and personal goals. Task-concerns can relate to teacher’s work duties or to structures and resources of the school. Impact concerns can relate to teacher’s value system, consequence on the working environment, consequence on students or possibilities for future refinement of the innovation.

An important requirement for the use of C-BAM is that there is some kind of an innovation that needs to be adopted by an organization. The need for adopting the innovation comes usually from the outside. A good example would be a school reform put forward by the government. In order to make this reform happen the government and the school system should work together through a collaborative system (Hall et al., 1973). The Community of Learners in IRRESISTIBLE is one example of a collaborative system and RRI is the innovation that needs to be adopted.

### **Stages of Concerns**

The biggest and the most used application of C-BAM is the Stages of Concern questionnaire. It divides concerns usually to 7 stages (Bailey & Palsha, 1992; Hall et al., 1977; Shoulders & Myers, 2011):

**0 Awareness stage** is a relevant stage only if there are people in the organization who are not aware of the innovation. That is the reason why it is also called the zero stage. In Baileys (1992) research awareness stage was absorbed into the information stage. Rest of the stages can be divided into two groups. **1 Information stage 2 Personal stage and 3 Management stage** are low level stages that mostly relate to self and task concerns. Having a lot of low level concerns can indicate many things. For example teachers might be lacking the necessary information, competency or resources, or the project might be in an early phase, or teachers are interest about knowing more, or teachers might have attitudes against the innovation. **4 Consequence stage 5 Collaboration stage and 6 Refocusing stage** are high level stages and should be beneficial for the adoption of an innovation. Stage 4 is especially important for teachers, since their work has consequences on school students.

A typical C-BAM study shows a change in concerns from low level self- and task centered concerns to higher level impact concerns. Overbaugh & Ruiling (2008) found out that teachers' informational and personal stages were lowered during a professional development course. Management concerns did not change and were quite low during the whole process. High level concerns also did not change much, but they were on a relatively high level during the whole process. These high levels suggest that teachers were already quite motivated to collaborate and refocus the ways they use technology in teaching.

**4-5 stage models:** Some studies have decided to limit the number of stages in order to improve the logical and statistical properties of the questionnaire and the model. Bailey & Palsha (1992) used factor analysis to analyze the validity of the 7 stage model. They noticed that many items in the questionnaire did not belong into just one stage. The overlapping items were divided into other stages and some stages were abolished. Many items were moved from informational to personal stage. This makes sense for example because having too little infor-

mation can be a personal concern. The majority of the items in consequence and refocusing stages were combined into impact stage. The new 5 stage model had Awareness-, Personal-, Management-, Impact and Collaboration-stages.

Most items in the SoC-questionnaire are about concerns or interests. Items which investigate concerns usually start with 'I am concerned...' and continue with a theme related to the stage, e.g. '...my ability to teach RRI'. This would be a personal stage item. Items which investigate positive concerns or interests usually start with 'I would like to know...' and continue also with the theme of a stage. There are also some other kinds of items especially in the awareness stage, since awareness is not really a concern or an interest.

**Concern profiles:** The Stages of Concern questionnaire is a diagnostic tool and therefore it is important to try to identify the implications of a certain kind of a concern profile. A crude idealization was already done in the original C-BAM, where Hall et al. (1973) identified what is the effect of a particular concern-stage. These effects are called 0 Unaware, 1 Awareness, 2 Exploration, 3 Early trial, 4 Limited Impact, 5 Maximum Benefit and 6 Renewal, and they go hand in hand with the concern stages.

Another way to identify the effect of the concerns stages is to derive SoC-profile types. Hollingshead (2009) identified four types. The resistor is less aware of the innovation than others, has little interest in getting new information, has intense personal and management concerns, and is more concerned than interested in the higher stages. The ideal implementer has very low concerns in the low-level stages, and is interested in consequence and collaboration of the innovation. The ideal implementer is not necessary yet interested in refocusing. The co-operator is almost like the ideal implementer but is more concerned about information, personal aspects and the consequence on workplace. The overachiever is also almost like the ideal implementer but has less personal concerns and more information and managing concerns.

## METHODS AND ANALYSIS

The Stages of Concern questionnaire developed by Hall et al. (1977) was adapted to suit the context of RRI teaching. Examples of the items in each concern stage are presented in Table 2 (see Results). Six new items were added, but are not included in the SoC-profile analysis, since they would have a negative effect on comparability. In order to limit the length of the questionnaire items least fitting for IRRESISTIBLE were deleted. Only one item was left in the awareness stage based on the assumption that all teachers already knew about RRI. There were also too many items that dealt with practical and organizational aspects of bringing a teaching innovation to school. The adopted questionnaire consisted of 33 items and uses a 5 point agree-disagree Likert-scale, with an option to answer 'I cannot say'.

The questionnaire was also translated to each partners' local language, with the exception of Italy and Poland who used the English version. In 2014, 52 teachers and 16 teacher students took 15 to 20 minutes to complete the questionnaire during the first meeting of the CoL in the IRRESISTIBLE project. Thereby this study reveals concerns teachers face before a teacher professional development program. Later the SoC-questionnaire will be employed again to carry out the pre-post comparison.

The analysis consisted of three parts. The first part was to calculate SoC-profiles for the whole group. Second part was a reliability analysis in order to see if the items in a concern stage measure the same thing. The third part was an explanatory factor analysis to see if the arising factors are the same as the concern stages. The responses can also be analyzed individually, to get a better picture of the overall SoC-profile, but this analysis is left for future work.

In the first part the Likert scale was collapsed, which means that slightly agree and agree were treated the same way. An argument to support this is that some people are more cautious than others to fully agree and therefore the two options are not comparable between respondent. However, the full Likert scale was used in the factor analysis because correlations are always calculated by comparing two answers from the same respondent. In this case there should be a clear difference if the respondent agrees fully or only slightly.

The teacher students of Finland were left out of the factor analysis because their responses differ greatly from the in-service teachers. Teacher students had significantly more 'I cannot say' responses than the teachers, 25 % opposed to 4 %. This might be because of culture, age, or the setting. Finnish culture is stereotypically one that follows rules and if something is unclear Finns tend to be uncertain. The students were also attending a course so they might have felt that they were evaluated.

## **RESULTS**

Some of the items are presented in Table 2. The second column tells the percentage of teachers who choose either 'agree' or 'slightly agree'. The third column tells the 'I cannot say'-percentage, which consists mostly of the Finnish teacher students. The last column is a collapsed average. Agreement is given a numerical value of 1, disagreement a value of -1 and 'I cannot say' has a value of 0. The collapsed average tells if the item had a positive or negative effect on the overall concern stage.



*Table 2: Examples of SoC-questionnaire items from each stage.*

| <i>Item</i>                                                                                                                       | <i>Agreement</i> | <i>I cannot say</i> | <i>Average</i> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|---------------------|----------------|
| <b>Awareness:</b> 17. <i>I am preoccupied with things other than teaching about RRI.</i>                                          | 28 %             | 22 %                | -0,4           |
| <b>Informational:</b> 29. <i>I would like to know more about RRI topics myself.</i>                                               | 94 %             | 4 %                 | 1,0            |
| <b>Personal:</b> 27. <i>I would like to know how my role will change when I teach about RRI.</i>                                  | 81 %             | 12 %                | 0,8            |
| <b>Management:</b> 13. <i>I am concerned about my ability to manage all that teaching about RRI requires.</i>                     | 60 %             | 16 %                | 0,2            |
| <b>Consequence:</b> 15. <i>I am concerned about evaluating my impact on students.</i>                                             | 72 %             | 9 %                 | 0,4            |
| <b>Collaboration:</b> 23. <i>I would like to coordinate my efforts with others to maximize the effects of teaching about RRI.</i> | 81 %             | 16 %                | 0,9            |
| <b>Refocusing:</b> 16. <i>I would like to revise the approach of teaching about RRI.</i>                                          | 53 %             | 35 %                | 0,5            |

The awareness stage asks if the teacher has heard about RRI but also if they are committed to it. Item 17. shows that most teachers are not preoccupied with other things than RRI teaching. Item 29. is a typical informational item which usually produce strong agreement percentages. Teachers agree with items that start with “I would like to know...” regardless of the stage. On the opposite are the ‘I am concerned’-items which separate the teachers better. Surprisingly many teachers agree with item 13. which states that the teacher is concerned about practical management issues related to RRI teaching. Teachers are also quite concerned about evaluating their impact on students, according to item 15. Collaboration is an important reason to participate to IRRESISTIBLE and this also shows in the response to item 23. Finally it seems that not all teachers are ready to revise RRI teaching further according to item 16.

The most common way to analyze the SoC-questionnaire is to combine the responses of items to sum variables representing a particular concern stage. In Figure 1 responses to all 33 items are put in their concern stage and the values represent the average of these items. The original questionnaire was too long and not all items fitted IRRESISTIBLE. Unfortunately the actions which aimed to solve this issue resulted to unbalanced questionnaire with only one awareness item, 7 informational items, 2 personal items, 4 management items, 6 consequence items, 2 collaboration items and 5 refocusing items. Because different stages have different number of items, the max and min values for a concern

stage are fixed between -5 and 5. The awareness stage is left out because there is only one awareness item. The personal and the collaboration stage have so few items, that assumptions about these stages should be made with caution.

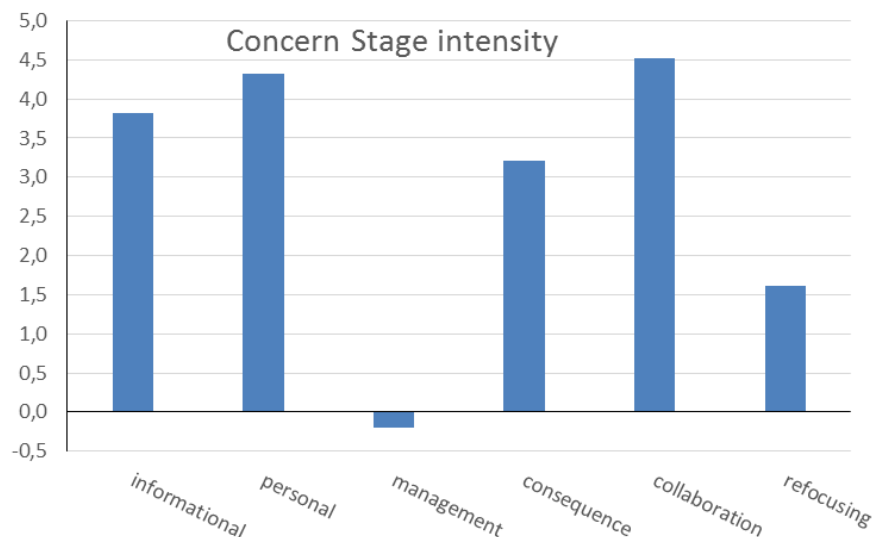


Figure 1: Overall concern profile of teachers

The profile is in-line with the M-shape seen in many CBAM studies, which means that un-awareness, management and the refocusing stages have lower intensities than other stages.

### Statistical validity

There are multiple ways of determining if scales formed from questionnaire items really measure the same thing. This study uses a straight forward reliability analysis, which calculates Cronbach's alphas for each scale. This chapter also introduces another method, explanatory factor analysis, which tries to find the best possible scales by looking into correlations between items.

Table 3: Cronbach's alphas for the concern stage scales.

| Informational                 | Personal | Management | Consequence | Collaboration | Refocusing                    |
|-------------------------------|----------|------------|-------------|---------------|-------------------------------|
| 0.76                          | 0.58     | 0.49       | 0.51        | 0.79          | 0.38                          |
| 0.86<br>(item 5 de-<br>leted) |          |            |             |               | 0.56<br>(item 2 de-<br>leted) |

Cronbach's alpha is calculated from average correlation between items, and can have values between 0 and 1. A rule of thumb is that anything under 0.6 is poor or unacceptable. Furthermore, having over 6 items in a scale will easily inflate

the alpha, because in this case even a small average correlation like 0.2 would gain an alpha over 0.6 (Abel & Lederman, 2007, pp. 506).

From Table 3 we see that only the informational and the collaboration stage are internally consistent. The best candidate for a reliable scale is the informational stage, which would have a reasonably high alpha 0.86, if item 5 was deleted. The personal and the collaboration stage have only 2 items, and the personal stage comes close to being internally consistent.

The analysis shows that the management, consequence and the refocusing stages are the least consistent scales, because their alphas are low even though there are sufficient numbers of items in these stages. Furthermore, the analysis suggests only one item to be deleted in the refocusing stage, but does not tell which items should be deleted to further refine these stages.

There is also a possibility that a better structure for the SoC-scales exists. A possible new structure could be discovered by factor analysis.

*Table 4: Factor component eigenvalues.*

| Component | Initial Eigenvalues |               |              |
|-----------|---------------------|---------------|--------------|
|           | Total               | % of Variance | Cumulative % |
| 1         | 7,504               | 35,734        | 35,734       |
| 2         | 2,160               | 10,286        | 46,020       |
| 3         | 1,897               | 9,035         | 55,054       |
| 4         | 1,259               | 5,997         | 61,051       |
| 5         | 1,204               | 5,732         | 66,783       |
| 6         | 1,036               | 4,933         | 71,716       |

There are at least three ways of determining the right number of factors from components. First is to simply use all the components that have an eigenvalue above 1. Second way is to arrange the components by their magnitude and look for sudden drops in eigenvalues. A third way is to choose as many components as your theory predicts.

From Table 4 we can see that the eigenvalues drop after 3 and 5 components. Unfortunately three factors would explain only 55 % of the total variance, and therefore it is better to choose five components which would explain 67 % of the total variance. Five components is also in line with some CBAM studies using 5 concern stages.

The first problem with the five component factor analysis is that the first factor is loaded heavily. There are 12 items in the first factor, 8 in the second, 2 in the

third, 2 in the fourth and only 1 item in the last factor. In other words, the items are not forming the factors they are supposed to according to the CBAM theory.

## **DISCUSSION**

Based on the 'M-shape' of the SoC- profile one might derive that teachers are generally aware about teaching innovations, and are not too concerned about management and refocusing the innovation. However, the stages are not entirely comparable because of differences in the formulations of the items. For example the informational stage has only items starting with 'I would like to', and the management and consequence stages have mostly 'I am concerned'-items. The results of this study suggest that such differences in question phrasing may distort the concern profile. This problem will be addressed when refining the questionnaire for the second round.

Yet, one of the most interesting findings when comparing results of the SoC-profile and the formulation of items is that the management stage and the consequence stage have a significant difference even though many items are formulated the same way. There is a small difference in the average of 'I am concerned...' items between these stages. This may suggest that teachers are more concerned about their students understanding of RRI than they are about managing RRI teaching. Teachers are especially concerned about their effect on students. This issue could be addressed by clarifying the learning goals of RRI teaching.

It seems that teachers of IRRESISTIBLE have quite high concerns throughout the concern stages. Usually high level concerns are absent in an early phase of a collaborative period. Thereby, the results of this study support the notion that early engagement of the teachers speeds up educational reforms. In IRRESISTIBLE, the teachers were involved in the process already in the initial planning of the approaches for RRI teaching. It seems that they have very quickly engaged with the subject and gained concern profiles which at least partially resemble typical implementation phase concerns (cf. Hall et al., 1973; Hollingshead, 2009). It will be interesting to see if teachers' low level concerns are resolved and substituted by higher level concerns, when comparing to the future post-test.

The informational stage is the only statistically sound scale according to the reliability analysis. Stages 2 and 5 need more items and rest of the stages need more homogenous items. Another way of improving the consistency of the scales in the SoC-questionnaire is to restructure the items and the scales. The factor analysis did not find an alternative structure for the SoC-questionnaire.

The IRRESISTIBLE project will have a second round with more teachers involved. Based on the groundwork of this study the SoC-questionnaire will be developed further to better suit the RRI aspects in teacher professional devel-

opment. The developed instrument will provide valuable insights not only into the prospects of bringing RRI in school, but also into the general functionality of teacher professional development based on communities of learners.

## REFERENCES

- Abel, S. K., & Lederman, N. G. (2007). *Handbook of research on science education*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Anderson, R. D., & Helms, J. V. (2001). The ideal of standards and the reality of schools: Needed research. *Journal of Research in Science Teaching*, 38(1), 3-16.
- Bailey, D. B., & Palsha, S. A. (1992). Qualities of the stages of concern questionnaire and implications for educational innovations. *Journal of Educational Research*, 85(4), 226-232.
- Bybee, R. W. (2000). Teaching science as inquiry. In J. Minstrell, & E. van Zee (Eds.), *Inquiring into inquiry learning and teaching in science* (pp. 20-46). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Hall, G. E., George, A. A., & Rutherford, W. L. (1977). *MEASURING STAGES OF CONCERN ABOUT THE INNOVATION: A manual for use of the SoC questionnaire*. Washington, DC: National Inst. of Education (DHEW).
- Hall, G. E., Wallace Jr., R. J., & Dosset, W. F. (1973). *A developmental conceptualization of the adoption process within educational institutions*. Austin: the University of Texas.
- Hollingshead, B. (2009). The concerns-based adoption model: A framework for examining implementation of a character education program. *NASSP Bulletin*, 93(3), 166-183.
- IRRESISTIBLE Description of Work. (2013). *Including responsible research and innovation in cutting edge science and inquiry-based science education to improve teacher's ability of bridging learning environments*
- Leblebicioglu, G. (2011). The effect of informal and formal interaction between scientists and children at a science camp on their images of scientists. *Science Education International*, 22(3), 158.
- Lumpe, A. T., Haney, J. J., & Czerniak, C. M. (2000). Assessing teachers' beliefs about their science teaching context. *Journal of Research in Science Teaching*, 37(3), 275.
- Overbaugh, R., & Ruiling, L. (2008). The impact of a federally funded Grant on a professional development Program: Teachers' stages of concern Toward technology integration. *Journal of Computing in Teacher Education*, 26(2), 45-55.
- Rennie, L. J. (2007). Learning science outside of school. In S. Abell, & N. Lederman (Eds.), *Handbook of research on science education* (pp. 125-167). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shoulders, C. W., & Myers, B. E. (2011). An analysis of national agriscience teacher ambassadors' stages of concern regarding Inquiry-Based instruction. *Journal of Agricultural Education*, 52(2), 58-70.
- Sutcliffe, H. (2011). *A report on responsible research and innovation* European Commission.

- van Driel, J. H., Beijaard, D., & Verloop, N. (2001). Professional development and reform in science education: The role of teachers' practical knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 38(2), 137-158.