MATEMATIIKAN JA LUONNONTIETEIDEN OPETUKSEN TUTKIMUSSEURAN TUTKIMUSPÄIVÄT 2015

ANNUAL SYMPOSIUM OF THE FINNISH MATHEMATICS AND SCIENCE EDUCATION RESEARCH ASSOCIATION 2015

Harry Silfverberg & Peter Hästö (toim.)

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura r.y.

http://www.protsv.fi/mlseura/

ISBN 978-952-93-8233-0

ESIPUHE

Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseura ry:n 32. tutkimuspäivät järjestettiin Turun yliopiston opettajankoulutuslaitoksella 29.–30.10.2015. Päivillä kuultiin 46 tutkijan pitäminä yhteensä 29 esitelmää matematiikan ja luonnontieteiden didaktiikan meneillään olevista tutkimuksista. Kutsuttuina pääpuhujina esiintyivät

> PhD Kristóf Fenyvesi, prof. Raine Koskimaa ja dos. Osmo Pekonen (Jyväskylän yliopisto) Mathematical adventures for the senses and the mind: Math-Art activities for experience-centered education of mathematics,
> Prof. Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (Turun yliopisto) Challenges of learning science in higher education - Examples from preservice teacher education and medical education,
> PhD Jake McMullen (Turun yliopisto) Spontaneous focusing on quantitative relations and rational number development.

Perinteiseen tapaan tutkimuspäivien esitelmöitsijöille tarjottiin mahdollisuutta tarjota tutkimusartikkelia julkaistavaksi päivien konferenssijulkaisussa. Kaikki tarjotut artikkelit vertaisarvioitiin single-blind menettelyä käyttäen. Arviointiprosessin järjestämisestä vastasivat allekirjoittaneet yhdessä, lukuun ottamatta toimittajien omia artikkeleja, joiden arviointiprosessi järjestettiin kirjoittajilta itseltään salatusti. Korjauskierrosten jälkeen 15 parasta artikkelia hyväksyttiin julkaistavaksi. Artikkelien kirjoittajat vastaavat itse tekstiensä oikeellisuudesta. Valmis teos julkaistaan avoimena verkkojulkaisuna syksyn 2016 kuluessa.

Harry Silfverberg & Peter Hästö

PREFACE

The thirty-second Annual symposium of the Finnish mathematics and science education research association was held at the University of Turku, October 29–30, 2015. The invited plenary speakers were:

> PhD Kristóf Fenyvesi, prof. Raine Koskimaa and dos. Osmo Pekonen (University of Jyväskylä) Mathematical adventures for the senses and the mind: Math-Art activities for experience-centered education of mathematics,
>
> Prof. Mirjamaija Mikkilä-Erdmann (University of Turku) Challenges of learning science in higher education - Examples from preservice teacher education and medical education,
>
> PhD Jake McMullen (University of Turku) Spontaneous focusing on quantitative relations and rational number development.

After due changes 15 best articles were accepted for publication. The writers of the articles are themselves responsible for the correctness of the content of the article. The completed work will be published in the course of the autumn of 2016.

Harry Silfverberg & Peter Hästö

SISÄLLYS
TABLE OF CONTENTS

TIETEELLINEN TAIDEKOKEMUS – MUSEO LUONNONTIETEIDEN OPPIMISYMPÄRISTÖNÄ

Sari Harmoinen

Oulun yliopisto

Tämä tutkimus esittelee Oulun yliopiston matematiikan ja luonnontieteiden aineenopettajaopiskelijoiden (n=50) ja Oulun Taidemuseon henkilökunnan (n=4) kokemuksia taidemuseolla toteutetuista pajoista. Tutkimuksen kohteena olivat opiskelijoiden ilmiöpohjaisissa, koulun ulkopuolisessa oppimisympäristössä, toteutetuista pajoista saadut kokemukset. Pajoihin osallistuvat koululaiset olivat iältään alakouluikäisistä aikuisiin maahanmuuttajien kotouttamisryhmään. Kokemukset olivat hyvin antoisat. Opiskelijat saivat haastaa itseään erityisesti erilaisten oppijoiden kohtaamisessa sekä erilaisten ryhmien hallinnassa. Museo nähtiin, ei niinkään tilana vaan vuorovaikutuksen mahdollistajana. Museoväkeä kokemus kannusti erilaisen toiminnan järjestämiseen. Saatu kokemus kannustaa lisäämään vastaavaa toimintaa jatkossakin.

JOHDANTO

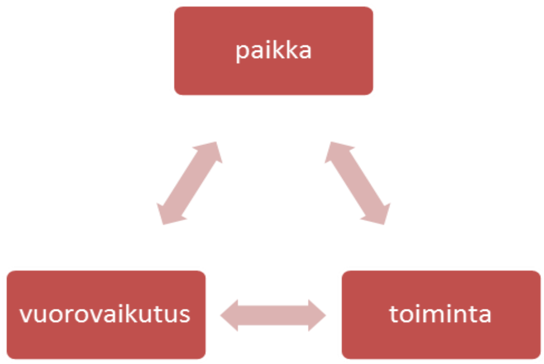
Matematiikan ja luonnontieteiden aineenopettajiksi opiskelevien pedagogiset opinnot kestävät yhden lukuvuoden. Opettajuus ja oppiminen rakentuvat kyseisen vuoden aikana osaksi tulevaa ammatti-identiteettiä. Opettajuus on opettamista, mutta myös toimijana olemista erilaisissa tilanteissa ja ympäristöissä. Opettajien olisi hyvä tehdä oppilaidensa kanssa erilaisia vierailuja ja retkiä muun muassa yrityksiin ja tiedemuseoihin. Siksi olisikin erittäin tärkeää ja hyödyllistä harjoitella ja miettiä sellaisen järjestämiseen liittyviä asioita jo opintojen aikana. Perusopetuksen opetussuunnitelma 2014 tuo esille ilmiöpohjaisen oppimisen merkityksen, joka voi olla monelle opettajalle ja opettajaksi opiskelevalle tilaisuus lähestyä tutkittavaa asiaa monipuolisesti.

Opetusharjoitteluun kuuluu perinteisesti oppituntien suunnittelua ja toteutusta harjoittelukoululla. Resurssit eivät useinkaan riitä muun opetukseen liittyvän harjoittelun tekemiseen. Oulun yliopiston opettajankoulutuslaitokselle tarjoutui mahdollisuus yhteistyöhön Oulun Taidemuseon ja tiedekeskus Tietomaan kanssa. Tässä tutkimuksessa esiteltävä toiminta on ensimmäinen Oulussa aineenopettajaopiskelijoiden kanssa tehty yhteistyö. Museon henkilökunta otti yhteyttä yliopistoon syksyllä 2014 ja tarjosi opettajaopiskelijoille tilaisuutta toteuttaa koululaisryhmille toiminnallisia pajoja talvella 2015. Pajat liittyisivät Oulun Taidemuseolla olevaan ”Checkpoint Leonardo” – näyttelyyn. Opiskelijoita oli varhaiskasvatuksen-, luokanopettaja- ja aineenopettajakoulutuksen ryhmistä, mutta tässä tutkimuksessa on keskitytty vain aineenopettajaopiskelijoihin.

TEORIAA

Oppilaille tulee tarjota mahdollisuus oppimiseen koulun ulkopuolella sekä heille tulisi tarjota monipuolista ja tehokasta oppimista erilaisissa oppimisympäristöissä (POPS 2014). Erilaiset oppimisympäristöt lisäävät valmiuksia toimia yhteiskunnan jäsenenä (Kuuskorpi, 2012). Tämän taidon harjoittelu tulisikin voida tarjota myös opettajaksi opiskeleville. Opiskelijoilla tulisi olla mahdollisuus toimia erilaisissa oppimistilanteita ja kehittää tulevaisuudessa tarvittavia työskentelytaitoja. Euroopan komission raportissakin (2015) esitettiin, että opetuksessa, erityisesti science aineiden opetuksessa, tulisi tehdä yhteistyötä kaikilla yhteiskunnan tasoilla.

Oppimisympäristöille on olemassa useita erilaisia määritelmiä. Sillä voidaan tarkoittaa sosiaalista, fyysistä ja psyykkistä oppimiseen käytettävää ympäristöä (Nuikkinen, 2009). Sen voi muodostaa lähiympäristö, ulkopuolinen toimintaympäristö ja toiminnan ilmapiiri (Björklid, 2005). Toisaalta se voi olla paikka tai yhteisö, jossa on käytössä erilaisia resursseja, joiden avulla voidaan ymmärtää moninaisia asioita (Wilson, 1996). Tai se voi muodostua sekä ympäristöstä että teknologiasta (Dument & Istance, 2010). Oppimisympäristöllä tarkoitetaan kuitenkin usein oppimista tukevien mahdollisuuksien huomioimista sekä tilana, toimintana että vuorovaikutuksena.



Kuvio 1. Oppimisympäristön osatekijöitä

Opetussuunnitelman perusteissa (POPS 2014) nostetaan esille myös tulevaisuuden taidot. Niissä korostetaan muun muassa ajattelu- ja työskentelytapojen harjoittelua. Harjoittelulla tavoitellaan luovuuden, kriittisen ajattelun, oppimisen, kommunikoinnin ja informaation lukutaidon lisääntymistä (Fullan & Lanworthy, 2013). Näitä taitoja opettajien tulisi tulevaisuudessa opettaa myös oppilaille. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (POPS 2014) tuovat myös aiempaa korostetummin esille ilmiöpohjaisen oppimisen. Usein sillä tarkoitetaan monialaisia oppimiskokonaisuuksien, joissa huomioidaan paikalliset mahdollisuudet (European Comission, 2015). Opetussuunnitelma ja pedagogiikka eivät saisi olla erillisiä toisistaan riippumattomia elementtejä (Osborne, 2007). Olisikin tärkeää ohjata opettajaksi opiskelevia näkemään opetussuunnitelman erilaisia käytännön toteutumisia. Tämä on hyvin perusteltua, koska oppilaan kokemus synnyttää oppimista sekä uudistaa hänen ajattelua (Hyyppä, Kiviniemi, Kukkola, Latomaa & Sandelin, 2015).

Museo oppimisympäristönä

Museoissa on ollut opetuksellista toimintaa jo pitkään, mutta toiminta ei ole kuitenkaan ollut aina kovinkaan opetuksellisesti tavoitteellista (Tornberg & Veteläinen, 2008). Museo on voinut olla oppimisen kohde, paikka tai tila oppimiselle, virikkeiden antaja, ajattelun tai oppimisprosessin stimuloija. Se on voinut tarjota tietoa, taitoa tai elämyksiä sekä toimia arvokasvatuksen tukena. Eshachin (2007) mukaan museo voi toimia non-formaalina oppimisympäristönä. Usein museo nähdään ikkunana syvälle omiin kokemuksiin, menneisyyden ja tulevaisuuden välissä. Tyypillisesti museovierailu on strukturoitu, oppaan vetämä luentomainen kierros, jossa oppilaiden roolina on liikkua yhtenä ryhmänä oppaan perässä ja täyttää kyselylomake (Griffin & Symington, 1997). Oppijan ja osallistujan omia kokemuksia ei hyödynnetä tai huomioida vierailun aikana.

Oppiminen on konstruktivistisen käsityksen mukaan yhteisöllistä tiedon jakamista, jossa huomioidaan luovasti oppimisympäristö ja sen mahdollisuudet. Oppimista koulun ulkopuolella tulee suunnitella ja valmistella vähintään samalla tavoin kuin muutakin opetusta, jotta sitä voitaisiin hyödyntää oppimisen resurssina (Griffin & Symington, 1997; Eshach, 2007). Koulun ulkopuolisella oppimisella tulee olla myös tavoitteet, mutta ne eivät välttämättä ole samat kuin perinteisessä luokkahuoneopetuksessa eli oppimista tulee ajatella uudella tavalla. Cox-Peterson, Marsh, Kisiel ja Melbern (2003) tekemässä tutkimuksessa nousi esille didaktisen ajattelun merkitys museovierailun suunnittelussa. Museovierailu voi olla didaktisesti merkityksellinen oppimisympäristön eikä niinkään sisällön kannalta.

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan museota oppimisympäristönä ja selvitetään aineenopettajaopiskelijoiden kokemuksia opetuksen suunnittelusta siellä. Lisäksi selvitetään miksi museo on merkityksellinen oppimisympäristönä. Tuloksia tarkastellaan seuraavien kysymysten kautta.

1. Millaisia tavoitteita opettajaopiskelijat asettavat omalle työskentelylleen Taidemuseolla?
2. Millaisia kokemuksia opiskelijoilla ja museon henkilökunnalla oli Taidemuseolla työskentelystä?

TUTKIMUSASETELMA

Checkpoint Leonardo – näyttelyn järjestelyssä ja pajatoiminnan toteuttamisessa Oulussa on ollut laaja yhteistyöverkosto. Mukana on ollut Oulun Taidemuseo OMA, Oulun Tietomaa, Maaseudun sivistysliitto, Oulun yliopiston opettajankoulutuslaitos, luokanopettajaopiskelijoita sekä matematiikan, fysiikan, kemian, biologian ja maantieteen aineenopettajiksi opiskelevat sekä Oulun seudun koulut alakouluista aikuisopiskelijoihin saakka. Kouluille tiedotettiin pajoista kulttuuriyhdysopettajien kautta ja Oulun Taidemuseon kautta opettajat saivat varata etukäteen oppilasryhmälleen yhden tarjolla olevasta 18 pajasta. Ryhmän tuovien opettajien ei tarvinnut valmistella tieteellisistä näkökulmista oppilaita museotoimintaan eikä heillä ollut opetus- tai ohjausvastuuta, mutta opettajien tuli olla läsnä. Aikatauluissa oli huomioitu opiskelijoiden ja koululaisten opintoaikataulut sekä siirtymiset kouluilta ja yliopistolta museolle.

Opiskelijoiden (n=50) aikataulu suunnittelun ja toteutuksen suhteen oli nopea. Opiskelijat aloittivat pedagogiset opinnot viikolla 2 ja ilmiöpohjaista oppimista ja opetusta harjoiteltiin sekaryhmissä viikolla 6. Sekaryhmissä oli 5 opiskelija pääasiallisesti eri pääaineista. Sekaryhmissä toiminta oli kolmivaiheista. Aluksi sekaryhmille annettiin kaikkia oppiaineita yhdistävä ilmiö, josta heidän tuli tehdä suunnitelma oppitunnista, jossa näkyy kaikkien oppiaineiden näkökulma. Toisessa vaiheessa opiskelijat suunnittelivat valitsemansa ilmiönpohjalta oppitunnin, sitomatta sitä mihinkään oppiaineeseen, mutta huomioivat eri oppiaineiden tarjoaman tietosisällön. Kolmannessa vaiheessa ryhmille annettiin kuva Leonardo da Vincin teoksesta tai luonnosvihosta. Luonnoskirjan kuva toimi inspiroijana ja ajatuksien herättäjänä. Tämän jälkeen kävimme viikolla 7 tutustumassa opiskelijoiden kanssa Oulun Taidemuseolla näyttelyyn, jota he käyttäisivät oppilasryhmien työskentelyn inspiroijana. Näyttelyssä oli teoksia muun muassa Heinolta, Närhiseltä, Schäringiltä ja Sylvia Grace Bordanilta. Opiskelijat toteuttivat koululaispajat viikoilla 9 ja 11. Jokaisella ryhmällä oli toteutus kaksi kertaa.

Käytännön toteutukseen opiskelijoille annettiin ohjeita 20 – 25 oppilaan ryhmän vastaanottamiseen taidemuseolla sekä toiminnan ohjaamisesta. Ryhmän tuli valita näyttelystä korkeintaan kolme taideteosta ja miettiä missä järjestyksessä kohteet kierretään. Huomioitavana oli, ettei kierros ole vapaamuotoinen läpikävely, vaan sen tulee olla ohjattua. Tämän jälkeen opiskelijat siirtyivät oppilaiden kanssa työskentelemään pajoihin taidemuseolta tai Tietomaasta valitsemaansa tilaan.

Pajatyöskentelyn onnistumiseksi, opiskelijoiden tuli miettiä huolellisesti työohjeistus ja roolit työskentelyn aikana. Lisäksi opiskelijat miettivät etukäteen mitä he vaativat oppilailta, työskentelevätkö oppilaat yksin vai ryhmissä ja miten ryhmiin jakautuminen tehdään. Opiskelijoita ohjattiin myös miettimään, mikä tavoite lopputuotokselle asetetaan ja mitä tuloksella tehdään. Tämän vaiheen suunnittelussa kannustettiin opiskelijoita pohtimaan erilaisia toteutusvaihtoehtoja, vaikka tarkoituksena olisikin käyttää niistä vain yhtä. Lisäksi valmisteluissa yritettiin ohjata opiskelijoita arvioimaan mitä asioita, tilanteita ja mahdollisuuksia työskentelyssä voisi tulla esille.

AINEISTON KERÄÄMINEN

Tämä tutkimus on tapaustutkimus, jossa kuvataan aineenopettajaopiskelijoiden kanssa toteutettua toimintaa osana ainedidaktisia opintoja. Tutkimuksessa on kartoitettu opiskelijoiden ja museohenkilökunnan kokemuksia ja mielipiteitä google forms-lomakkeella. Vastauksia on 50 opiskelijalta ja 4 henkilöltä museolta.

TULOKSIA

Seuraavassa esitellään opettajaopiskelijoiden asettamia tavoitteita omalle toiminnalle sekä heidän kokemuksiaan itse toiminnasta. Lisäksi esitetään museohenkilökunnan kokemuksia yhteistyöstä.

Opettajaopiskelijoiden asettamia tavoitteita toiminnalle

Opiskelijoiden vastauksista oli selvästi havaittavissa tavoitteiden asettelua sekä omalle toiminnalle, oppilaiden kohtaamiselle että koulun ulkopuolisen oppimisympäristön, museon osalle.

Omalle työskentelylle esitetyt tavoitteet olivat tyypillisesti hyvin konkreettisia.

> *"Esitellä oppilaille veden ominaisuuksia kokeiden avulla" (*kuva 2.),

jossa tavoite liittyi substanssin eli tieteellisen tiedon välittämiseen. Kuvassa 2 opiskelija tutkii pajaan osallistuneen lapsen kanssa pintajännitystä elintarvikevärien avulla.

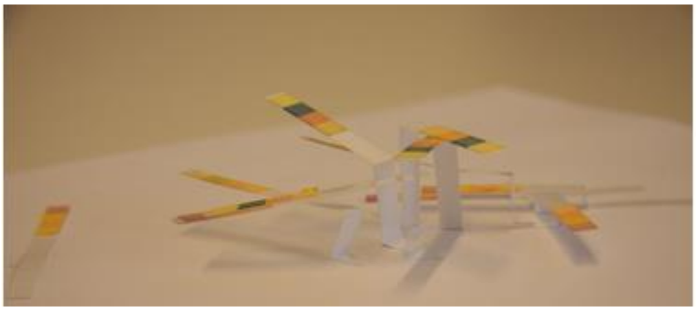
Osalla opiskelijoista tavoitteena oli saada aikaiseksi aktiivista vuorovaikutusta oppilaiden kanssa, kuten seuraavassa tulee esille yhteisen ajattelun kautta:

> ”*Pohtia yhdessä oppilaiden kanssa*” (kuvan 3. Opiskelija)

Kuva 2. Värien lumoa vedessä. Kuva 3. Keskustelua luonnon tilasta

Kuvassa 3 opiskelija pohtii eri puolilta maailmaa ottamiensa valokuvien avulla luonnon tilaa sekä ihmisen toimintojen ja valintojen vaikutusta luontoon. Keskeisenä aiheena olivat muoviroskien ympäristövaikutukset merissä. Taidetoksista pajatoiminnalle toimi erityisesti ″Merenneidon kyyneleet″ – teos.

Opiskelijoiden omissa tavoitteissa tuotiin esille myös arvokasvatuksellisia asioita, kuten esimerkiksi ″*Opettaa pajalaisia kierrättämään*″ (Kuva 4.)



Kuva 4. Käytetyistä pH-papereista tehty taideteos.

Kuvassa 4 on esitetty happamuuden tutkimuksissa käytetyistä pH-papeista valmistettu taideteos.

Oppilaiden kohtaamiseen ja aktivointiin liittyvät tavoitteet olivat yleisesti ″*Saada oppilaat oppimaan ja ajattelemaan*″ ja ″*Herättää oppilaiden kiinnostusta ja ajatuksia*″ (kuva 5.)

Kuva 5. Innostuksen siemen sytytetty

Museon tarjoamassa oppimisympäristössä haluttiin korostaa liittymäkohtia ympäristön, taiteen ja asennekasvatuksen välille, mutta tarjota ennen kaikkea mielenkiintoisia kokemuksia.

Aineenopettajaopiskelijoiden kokemuksia

Kyselyn alussa selvitettiin opiskelijoiden kokemuksia monivalintakysymyksillä ja sen jälkeen heitä pyydettiin kuvaamaan tarkemmin omia positiivisia ja haasteellisia kokemuksiaan. Taulukossa 1 on koottu opiskelijoiden kokemukset kysymykseen mikä oli museotyöskentelyn merkityksellisyydestä.

Taulukko 1. Opiskelijoille merkitykselliset kokemukset museolla työskentelystä.

Merkityksellinen kokemus	Lukumäärä (N=50)
itsensä haastaminen	2
ilmiöpohjainen oppiminen	8
erilaiset oppimisympäristöt	13
erilaisten ryhmien kohtaaminen	27

Taulukossa 1 esitettyjen merkitykselliset kokemukset olivat erilaisten ryhmien kohtaaminen ja erilaisessa oppimisympäristössä toimiminen. Opiskelijat eivät kokeneet kovinkaan merkitykselliseksi itsensä haastamista tai ilmiöpohjaista oppimista. Avointen kysymysten vastauksissa opiskelijat toivat esille seuraavia ajatuksia.

Erilaisten ennakkoon epävarmuutta tuovien tilanteiden tai ryhmien kohtaaminen ja hallinta oli myös tuottanut onnistumisen kokemuksia.

> ”*Kaaoksen hallinta” (opiskelija 22) ja ”Kuinka ryhmää hallitaan ja ohjataan” (opiskelija 8) tai ” Opin ihmistuntemusta ja ryhmän hallintaa. Yliopistossa teoriapuolella olen oppinut paljonkin erilaisia asioita, mutta koin, että käytännössä niistä opeista ei ollut juurikaan apua*.” (Opiskelija 30)

> ”*Sain ohjata sellaista oppilasryhmää, jota todennäköisesti en kohtaa harjoittelussa*” (Opiskelija 48)

> ”*Onnistumisen elämys” (opiskelija 16), ”Nähdä lasten kiinnostus/riemu ilmiöitä testatessa.” (opiskelija 29) tai ” 2.-luokkalaiseten oivallukset pajan aikana. Aikuisopiskelijoiden kohdalla iloa tuotti se että pajasta selvittiin ja ainakin osa oppilaista kuunteli ja osallistui aktiivisesti.*” (Opiskelija 33)

Koska opiskelijat olivat hyvin uudenlaisessa tilanteessa, toi se mukanaan myös erilaisia haasteita. Uutta oli yleensäkin ryhmän hallinta, mutta myös aineen hallintaan liittyvät asiat askarruttivat etukäteen. Aineenhallintaan liittyvät asiat koettiin kuitenkin onnistuneiksi. Sen sijaan suunnittelusta huolimatta saattoivat välineet loppua kesken, mutta niistäkin opiskelijat onnistuivat selviytymään hyvin.

> ”*Oppilaiden tietotaso yllätti iloisesti. Myös neljäsluokkalaiset esittivät melko korkeatasoisia ja vaikuttavia kysymyksiä valosta ja osasivat pohtia itsenäisesti ilmiöiden teoreettista taustaa. Lyhyesti sanottuna parasta oli tuottaa "AHAA-elämyksiä" ja nähdä oppimisen iloa.*” (Opiskelija 12)

> ”*Yhdessä työssä elintarvikevärit ja maito loppuivat kesken ja piti keksiä korvaavia värejä. Lisäksi oheistoimintaan kuten tiskaamiseen meni paljon aikaa.*” (Opiskelija 45)

Opiskelijoiden yhdessä tekeminen ja kokemusten tuottaminen tulivat myös vastauksissa esille:

> ”*Ryhmänä onnistuttiin ainakin omasta mielestä tuottamaan positiivinen kokemus koululaisille.*” (Opiskelija 14)

Vaikka erilainen oppimisympäristö oli toiseksi merkityksin kokemus, ei se kuitenkaan noussut esille avoimissa kysymyksissä. Ilmiöpohjaisesta oppimisesta koettiin merkitykselliseksi sen käytännön toteutuksen onnistumisen vuoksi.

> ”*Ilmiöpohjainen oppiminen onnistui käytännössä.*” (opiskelija 48)

Oleelliseksi näytti nousevan tilanteen ja ryhmien hallinta.

Museohenkilökunnan kokemuksia

Museolla pajojen toiminnan sujumiseen ja käytännön järjestelyjen onnistumiseen osallistui 4 henkilöä. Heidän odotuksensa liittyivät vain siihen, että opiskelijat pitävän mielenkiintoisia pajoja, koulun ulkopuolisessa oppimisympäristössä. Toteutumisen kokemukset toivat esille monia ennalta arvaamattomiakin asioita. Seuraavassa muutamia kommentteja:

> ”*Vaati aikaa!*” (H3) ja ”*Opiskelijat olivat alussa yhtä hukassa kuin me! Mutta hienosti suoriuduttiin loppuun asti!*” (H1)

Kaikkeen ei osattu varautua etukäteen ja kokemukset opiskelijoiden läsnäolosta tuottivat hämmennystä museon henkilökunnalle ja heidän perinteiseen työnkuvaansa. Kuitenkin kokemukset olivat pääsääntöisesti positiivisia.

> ”*Oli hienoa nähdä innostuneita opiskelijoita*” (H4)

> ”*Vilinää, huisketta ja melua. Oli mukavaa seurata, miten lapset innostuivat taiteesta ja tieteestä!*” (H1)

Vaikka kokemuksien pohjalta koettiin ajoittain yhteistyö haastavaksi, haluavat he tehdä yhteistyötä jatkossakin arvosanalla 4,5 (asteikolla 1-5). Museon henkilökuntakin koki oppivansa yhteistyöstä paljon. He nostivat esille seuraavia näkökulmia:

> *"Työpajat eivät varsinaisesti lisänneet työmäärääni, toivat vain työhöni uusia tehtäviä."* (H1)

> *"Mitä paremmin suunniteltu tapahtuma, sen helpompi on improvisoida ja rennosti reagoida erilaisiin ryhmiin ja tilanteisiin."* (H3)

Toisaalta heidän esille tuomissaan asioissa on havaittavissa opiskelijoiden kokemuksen vähäisyyden ja luokkahuoneen ulkopuolella tapahtuvan oppimisen mukanaan tuomia asioita, kuten seuraavat kommentitkin osoittavat.

> *"Opiskelijoiden tulee paneutua taideteoksiin ja otettava huomioon, että pajalaiset saattavat olla ensimmäistä kertaa taidemuseossa (,mutta paja innostaisi tulemaan toistekin)."* (H2)

> *"Opiskelijoiden on hyvä harjoitella äänenkäyttöä ja ryhmän hallintaa, taidemuseon tilat ovat aika haastavat, mutta niin ovat luokkahuoneetkin."* (H3)

> *"Suunnittelu ja tiedon jakaminen museon ja opiskelijoiden välillä etukäteen on tärkeää."* (H1)

POHDINTAA

Taidemuseon pajatyöskentely oli erilainen ainedidaktisten opintojen toteuttamistapa ja siksi siitä oli paljon opittavaa. Kerätystä palautteesta nousi esille, että kokemus oli opiskelijoille hyvin antoisa ja mielekäs ja lisäsi eri pääaineopiskelijoiden välistä yhteistyötä. Voidaankin todeta erästä opiskelijaa lainaten, että

> *"projekti opetti luottamaan ryhmässä olevaan potentiaaliin sekä suunnittelussa että toteutuksessa"* (Opiskelija 10)

Tämän tutkimuksen avulla pyrittiin selvittämään aineenopettajaopiskelijoiden kokemuksia koulun ulkopuolisessa oppimisympäristössä toimimisesta. Museolla mahdollistunut yhteistyö oli erittäin mieliin painuva ja merkittävä kokemus kaikille osapuolille; aineenopettajaopiskelijoille ja museohenkilökunnalle. Vaikka toteutus oli aikataulullisesti hyvin haastava, oli se erittäin onnistunut kokonaisuus. Yhteistyötaidot ja kriittinen ajattelu sekä tavoitteiden asettaminen, sekä itselle että oppilaille, saivat aivan uuden merkityksen, kun oppiminen siirrettiin luokkahuoneen ulkopuolelle. Toivottavasti kokemus rohkaisee opiskelijoita hyödyntämään erilaisia oppimisympäristöjä tulevassa työssään. Oppiminen on muutakin kuin tiedon jakamista. Se on yhdessä kokemista, oppimisen iloa! Vaikka toiminta voi olla välillä kaaoksen hallintaan verrattavissa oleva selviytymistilanne, tuottaa se aina merkityksellisiä kokemuksia.

Opiskelijat asettivat omalle toiminnalleen hyvinkin konkreettisia tavoitteita, esimerkiksi asianhallintaa liittyen, mutta toteutuksen jälkeiset kokemukset liittyivät usein aivan erilaisiin asioihin. Oleellista ei näyttäisikään olevan tällaisella työskentelyllä onnistunut asioiden opettaminen vaan käytännön asioiden onnistuneet toteutukset, erilaiset kohtaamiset ja kokemusten saamiset. Museo nähtiin oppimisympäristönä, ei niinkään tilana tai toimintana, vaan ennen kaikkea vuorovaikutuksen mahdollistajana. Museo ei ollut vain taiteen tai tieteen tekemisen ja havainnoin paikka, vaan luonnollisempi kohtaamisen ympäristö. Nuikkisen (2009) mukaisesti museo toimiikin sosiaalisena ja fyysisenä oppimisympäristönä. Siellä ei ole opiskelija tai sinne tuleva oppilas oppimiskulttuuriin luonnollisessa ympäristössä. Siksi siinä toimiminen tuottaa monia, kenties luokkahuoneessa huomiotta jääviä kohtaamisia.

Museon näkökulmasta näytti museotoiminnan tavoitteet toteutuvan hyvin. Opiskelijat muodostivat elämyksiä sekä taiteesta ja tieteestä inspiroituneita kävijöitä. Museolle asetetut tehtävät oppimisen kohteena, virikkeiden antajana, ajattelun tai oppimisprosessin stimuloijina näyttivät toteutuvan sekä museon henkilökunnan että opiskelijoidenkin mielestä. Fullan ja Lanworthy (2013) ajatuksien mukaisesti voidaan sanoa, että museolla voidaan harjoitella ajattelun ja yhdessä toimimisen taitoja. Tieteen ja taiteen yhdistämine ei ollut kenellekään ennestään tuttua, mutta siitä jäi kuitenkin ”*hyvä fiilis*” ja tunne, että ”*tämän tyyppisestä toiminnasta sai hyvin paljon irti*”. Lisäksi yhteinen mielipide oli, että toteutus mahdollisti hienon kokemuksen saamiseen.

Illiciä (1970) lainaten voidaan todeta, että

> ”*Luokkahuoneopetus siirtää oppilaan kulttuurimme ulkopuolelle ja tunkee heidät ympäristöön, joka on monin verroin ulkopuolista ympäristöä alkeellisempi, luonnottomampi ja lisäksi kuolettavan vakava*.”

Oppimisympäristön valinnalla on monia, jopa ennalta arvaamattomia merkityksiä. Saamamme kokemuksen perusteella jatkammekin yhteistyötä Oulun Taidemuseon kanssa 23.1. – 20.3.2016 olevien näyttelyiden **”Skills” ja ”Ihan tiloissa”** innoittamina. Olemme kehittäneet niitä kohtia, joissa Checkpoint Leonardossa nousi esille sekä selvitämme tässä esitetyn tutkimuksen toiminnassa huomiotta jääneiden osallistujien mielipiteeseen huomiota.

LÄHTEET

Bjurström, P. (2009). Att förstå skolbygnader. Väitöskirja. KTH Arkitekturskolan. Trita-ARK. Akademisk avhändling 2004:2. Stockholm: KTH Arkitekturskolan.

Cox-Peterson, A., Marsh, D., Kisiel, J. & Melber, L. (2003). Investigation of guided school tours, student learning, and science reform recommendations at a Museum of Natural History. *Journal of Research in Science Teaching*, 40 (2), 200 – 218.

Dumont, H. & Istance, D. (2010). *Analysing and designing learning environments for 21th century*. Teoksessa H. Dumont, D. Istance & F. Benavides (toim.)

The Nature of Learning. Using Research to Inspire Practice (s. 19-34). Paris: OECD Publishing,

Eshach, H. (2007). Bridging In-school and Out-of-school Learning: Formal, Non-Formal, and Informal Education. *Journal of Science Education and Technology*, 16 (2), 171 – 190.

European Comission (2015). Science education for Responsible Citizenship. European Commission Research and Innovation, Brussel. EUR 26893 EN.

Fullan, M. & Lanworthy, M. (2013) Toward a New End New Pedagogies for Deep Learning. Saatavilla http://www.newpedagogies.info.

Griffin, J. & Symington, D. (1997). Moving from task-oriented strategies on school excursions to museums. *Science Education*, 81 (6), 763 – 779.

Hyyppä, H., Kiviniemi, L., Kukkola, J., Latomaa, T. & Sandelin, P. (2015). Kokemuksen tutkimuksen ulottuvuudet. ePooki. Oulun ammattikorkea-koulun tutkimus- ja kehitystyön julkaisut 9. Hakupäivä 15.10.2015. http://urn.fi/urn:nbn:fi-fe201503252008.

Illich, L. (1972). Kouluttomaan yhteiskuntaan (suomentanut Valpola, A.). Delfiinikirjat, Helsinki: Otava.

Kuuskorpi, M. (2012). Tulevaisuuden fyysinen oppimisympäristö. Turun yliopisto, väitöstutkimus. Kasvatustieteiden laitos. Turku: Pallosalama.

Nuikkinen, K. (2009). Koulurakennus ja hyvinvointi. Teoriaa ja käyttäjän kokemuksia peruskouluarkkitehtuurista. Acta Universitatis Tamperensis: 1389. Väitöstutkimus. Kasvatustieteiden laitos. Tampere: Tampereen yliopistopainos, Juvenes Print.

Opetushallitus (2004). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004.

Osborne, J. (2007). Science Education for the Twenty First Century. *Eurasian Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 3 (3), 173 – 184.

Tornberg, L. & Venäläinen, P (2008). *Kulttuuriperinnön opetuksesta ja oppimisesta*. Teoksessa P. Venälänen (toim.). Kulttuuriperintö ja oppiminen (s. 66-74). Suomen museoliiton julkaisuja 58. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.

Wilson, B. G. (1996). *What is a constructivist learning environment?* Teoksessa B. G. Wilson (toim.). Constructivist Learning Environments: Case Studies in Instructional Design (s. 3-8). Englewood Cliffs, NJ: Educational Technology Publics.

Museon henkilökunnan ottamia valokuvia

KUVATAITEEN JA MATEMATIIKAN YHTEISIÄ ILMIÖITÄ ETSIMÄSSÄ

Mirka Havinga[1] & Päivi Portaankorva-Koivisto[2]

[1] Sydän-Laukaan koulu, Jyväskylä, [2] Helsingin yliopisto

Tutkimuksemme lähtökohta on etsiä kuvataidetta ja matematiikkaa eheyttävään opetukseen oppilaiden uteliaisuutta ja kiinnostusta herättäviä, pedagogisesti hyviä ilmiöitä. Tavoiteltavassa tiedonalapohjaisessa ilmiöoppimisessa kummankin oppiaineen luonne ja tyypilliset tavat hankkia ja prosessoida tietoa säilyvät tasavertaisina. Aineistoina ovat yläkoulun 7.-luokalle toteutettu opetuskokeilu ja matematiikan aineenopettajaopiskelijoille suunnattu kysely "mitä ovat matemaattiset ilmiöt". Havaitsimme, että riittävän avoin ilmiö mahdollistaa oppilaiden ja opettajan yhteisen aidon tutkimisen ja oppimisen. Tutkittavat ilmiöt voivat liittyä käsitteisiin, jotka ovat integroitaville tieteenaloille yhteisiä, esimerkkeinä suhde ja representaatio, tai ne voivat olla dynaamisia, pikemminkin tiedonhankinnan tai tiedonrakentelun prosesseihin liittyviä kuten lajittelu ja luokittelu.

JOHDANTO

Uudet perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet (POPS 2014) nostavat esiin ilmiöt. Kulttuurinen moninaisuus ja kielitietoisuus, eri tiedonaloilla käytettävät kielet ja symbolijärjestelmät antavat samoille ilmiöille tuoreita näkökulmia, joita hyvin valittujen ongelma- ja tutkimustehtävien avulla voidaan tutkia tarkemmin. Näillä herätellään uteliaisuutta ja kiinnostusta, ja ohjataan oppilaita monilukutaitoisiksi. Tämä edellyttää opettajilta uudenlaisia pedagogisia toimintatapoja ja yhteistyötä, jotta oppiainerajat ylittäen voidaan tarkastella todellisen maailman ilmiöitä kokonaisuuksina.

Tässä artikkelissa pohdimme, miten ilmiökeskeisyyttä voidaan toteuttaa kahden oppiaineen, kuvataiteen ja matematiikan, kesken näiden tiedonalojen luonne ja menetelmät huomioiden. Peilaamme rinnakkain Sydän-Laukaan koulun perusopetuksen seitsemännellä luokalla toteutettua eheyttävää opetuskokeilua, jossa oppiaineina olivat kuvataide ja matematiikka, sekä matematiikan opettajaopiskelijoille suunnattua kyselyä matematiikan ilmiöistä. Tarkastelemme, millaisia ovat ilmiöt, jotka ovat oppilaille kiinnostavia ja samalla kirkastavat eri tiedonalojen perinnettä. Pohdimme, millaisten ilmiöiden varaan monialaisia oppimiskokonaisuuksia voidaan rakentaa väljästi ja avoimesti niin, että yhteistyölle ja ajankohtaisiin tapahtumiin reagoimiselle jää tilaa, ja katsomme mahdollistaako eheyttävä aiheen käsittely erilaisten kysymysten, ratkaisujen ja toimintatapojen käyttämisen.

OPETUKSEN EHEYTTÄMINEN JA KOKONAISVALTAINEN OPETUS

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 ilmiöt liitetään toimintakulttuurin kehittämistä ohjaaviin periaatteisiin, oppimisympäristöihin ja työtapoihin. Sen lisäksi niitä tarkastellaan useimpien oppiaineiden kohdalla erikseen. Pedagogisesti tarkasteltuna on kyse opetuksen eheyttämisestä. Halinen ja Jääskeläinen (2015) ehdottavat, että opetusta voitaisiin eheyttää ensinnäkin oppilaan näkökulmasta. Tällöin pyrittäisiin rakentamaan opiskelukokonaisuuksia, jotka perustuisivat oppilaan omiin kokemuksiin, kysymyksiin tai kiinnostuksen kohteisiin. Toisena eheyttämisen lähtökohtana voisivat olla oppimisyhteisöä kehittävät toimintamallit, yhteisöllisyys. Kolmantena eheyttämisen keinona olisivat tiedonalalähtöiset, useammasta oppiaineesta rakennetut oppimiskokonaisuudet.

Rakenteellisesti eheyttämistä voidaan toteuttaa oppiainerajat ylittäen joko rinnastamalla tai jaksottamalla opetusta. Tällöin sama ilmiö saa tukea yhtäaikaisesti useammasta tiedonalasta käsin. Eheyttävät kokonaisuudet voidaan myös käsitellä teemapäivinä tai -viikkoina, jolloin ne irrotetaan oppiaineiden muusta opetuksesta. Laajempien oppimiskokonaisuuksien rakentaminen opettajien yhteistyönä, oppiaineiden ryhmittely oppiainekokonaisuuksiksi tai kokonaisopetus ovat esimerkkejä pitkäkestoisemmasta eheyttävästä työskentelystä. (Halinen & Jääskeläinen, 2015, vrt. Hurley, 2001.)

Kuvataiteen ja matematiikan eheyttävien oppimiskokonaisuuksien taustalla on ajatus kokonaisvaltaisesta opetuksesta. Räsänen (2010) ehdottaa integroivan kuvataideopetuksen mallia erääksi jäsennykseksi, jonka pohjalta taide- ja taitoaineita voi tarkastella muiden oppiaineiden rinnalla. Hänen mallissaan tietäminen perustuu havainnoille, tunteille, kunkin taiteen- ja taidonalan käsitejärjestelmää edustaville muodoille sekä kulttuurisille symboleille. Oppiaineen opetuksessa tavoitteena on, että havainnoista ja tunteista saatava tieto yhdistetään tekemisen kautta käsitteellistämiseen ja kulttuuriseen tietoon. Kun Räsäsen (2010) integroivan kuvataiteen mallia tarkastellaan matematiikan näkökulmasta, huomataan, että tutkiva, elämyksellinen matematiikka koostuu samoista, yhteisistä elementeistä.

TUTKIVA OPPIMINEN MATEMATIIKASSA JA KUVATAITEESSA

Matematiikassa tutkiva oppiminen on saanut rinnalleen useita eri nimityksiä. Portaankorva-Koivisto (2010) kuvailee sitä elämykselliseksi. Kun oppilailla on matematiikan tunnilla tilaisuus kehittää persoonallisia, merkityksellisiä ratkaisuja tehtäviin, joihin heillä ei ole ennestään valmiita ratkaisumalleja, ja jotka he itse voivat perustella toimiviksi ja päteviksi, niin he oppivat, mitä tarkoitetaan matemaattisesti erilaisilla tavoilla ratkaista jokin ongelma, ja miten näitä tapoja muodostetaan. Tällöin voidaan puhua omistajuudesta, oppilaiden omasta matematiikasta, joka kuitenkin sijoitetaan matematiikan yhteisön muovaamiin kulttuurisiin puitteisiin. (Portaankorva-Koivisto, 2010; Hähkiöniemi, 2011.)

Oppiminen kuvataiteessa tarkoittaa Räsäsen (2010) mukaan kykyä löytää ilmiöiden välisiin suhteisiin liittyviä erityisiä piirteitä, huomata, miten niitä voitaisiin kuvittaa tai kuvata ja millaisia metaforisia merkityksiä ne pitävät sisällään. Kyse voi olla sekä tuottavasta, että tulkitsevasta toiminnasta. Usein taiteilijan tekemät havainnot ja tunteet ovat ns. hiljaista tietoa, joten taideteoksen tulkinta ja tuottaminen vaativat hienosyistä erottelukykyä ja suhteiden ymmärtämistä, sekä symbolijärjestelmien tunnistamista ja tuntemista. Voidaankin puhua kuvataiteen tutkivasta oppimisesta.

TUTKIMUKSEN TOTEUTUS JA TULOKSET

Tässä artikkelissa tarkastellaan, millaisia ovat kuvataidetta ja matematiikkaa yhdistävät ilmiöt. Tutkimustehtävänämme on pohtia opetuskokeilusta saatujen kokemusten ja matematiikan opettajaopiskelijoiden kyselyn pohjalta, millaisia ovat ne kuvataidetta ja matematiikkaa yhdistävät ilmiöt, joita voitaisiin käyttää suunniteltaessa eheyttäviä oppimiskokonaisuuksia.

Artikkelin lähtökohtana on kuvataiteen ja matematiikan aineenopettaja Mirka Havingan opinnäytetyöhönsä suunnittelema opetuskokeilu. Syyslukukaudella 2014 Sydän-Laukaan koulun 7. luokan oppilaille suunnatut opetusta eheyttävät kokeilut pyrkivät toteuttamaan opetussuunnitelman sisältöjä ja tavoitteita ja samalla löytämään mahdollisuuksia, joissa kuvataiteen ja matematiikan oppiaineiden itsenäiset luonteet toteutuvat (Havinga, 2015).

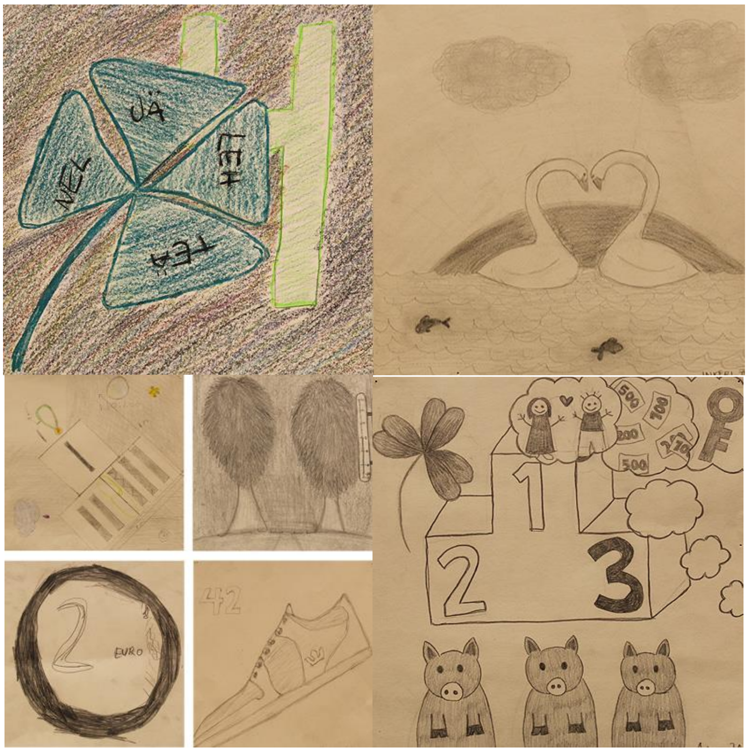
Opetuskokeilun ensimmäinen teema käsitteli henkilökohtaisten merkitysten tuottamista ja tulkintaa kokonaisluvuista. Kokonaisluvut ovat perusopetuksen opetussuunnitelmassa keskeinen aihealue, joka sijoittuu heti 7. luokan syksyyn. Työskentely aloitettiin matematiikan tunnilla. Tavoitteena oli oppia ryhmätyötä, avointa ongelmanratkaisua ja matemaattista perustelemista, sekä samalla tutustua kokonaislukujen lukujoukkoon. Oppilaat työskentelivät 3-4 hengen ryhmissä ja heidän tuli keskustellen valikoida seuraavasta luettelosta (1, -5, 4, 7, 32, 8, 11, ∞, 13, -10, -1, 0 49, 64) vähintään viisi lukua tai symbolia siten, että voivat loogisesti ja täsmällisesti perustella valintansa.

Taulukko 1. Frekvenssit ja esimerkkejä oppilaiden esittämistä lukujoukoista

Kategoria	*f*	Esimerkkejä oppilaiden lukujonoista
1) Ilmiö itse	0	
2) Ilmiön kuva	7	”yksinumeroisia lukuja” ”kaikissa luvuissa on pyöreitä muotoja”
3) Ilmiö, kuten se näyttäytyy	3	”peräkkäisiä lukuja” ”luvut ovat nollan ja äärettömän välissä”
4) Yhteys tai tulkinta kuvan ja nähdyn välillä	14	”luvut ovat viiden numeron välein” ”edellinen luku jaetaan kahdella” ”kaikki luvut ovat positiivisia” ”yksikään ei ole kahdella jaollinen”

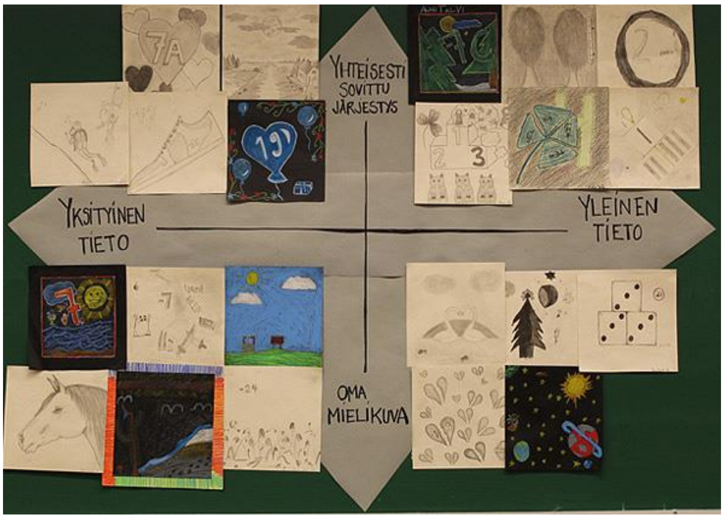
Oppilaitten vastauksia (taulukko 1) tulkittiin yhdessä heidän kanssaan neljän kategorian avulla (vrt. Brown, 2001): 1) ilmiö itse (lukumäärän ymmärtäminen), 2) ilmiön kuva (luku symbolina), 3) ilmiö, kuten se näyttäytyy ja 4) yhteys tai tulkinta kuvan ja nähdyn välillä. Suurin osa lukujoukoista sijoittui kategoriaan ”Yhteys tai tulkinta kuvan ja nähdyn välillä”. Tässä kategoriassa perustelut olivat matemaattisia. Yllättävästi mikään ryhmä ei esittänyt täysin epämatemaattisia lukujoukkoja kuten saman urheilujoukkueen pelinumeroita tms.

Kuvataiteen oppitunnilla teemaa jatkettiin. Oppilaan tehtävänä oli tehdä kuva, jonka aiheena oli itse valittu kokonaisluku. Työ tehtiin 20 cm x 20 cm kokoiselle paperille piirtäen tai maalaten. Lisätehtävänä oli tehdä kuva oppilaan valitseman luvun vastaluvusta. Yhteisessä tarkastelussa käytettiin aluksi matematiikan tunnilta tuttua kategorisointia.
Koosteesta (kuva 1) havaitaan, miten oppilaat olivat lähestyneet valitsemaansa lukua hyvin monin eri tavoin. Ensimmäisessä piirroksessa on selkeästi luvun kuva ja lukumäärä, toisessa piirroksessa luvun muoto joutsenten kauloissa ja lukumäärä useammankin kerran. Monet oppilaat olivat valinneet lukuja, jotka esittivät luvuilla esitettäviä järjestelmiä kuten rahaa, kengännumeroa, palkintoja tai lämpötila-asteikkoa. Erään oppilaan piirroksessa näkyvät sekä luku, lukumäärä, järjestysluku että luvun saduista tutut metaforiset merkitykset.



Kuva 1. Esimerkkejä ensimmäisen teeman kuvataiteen oppilastöistä.

Oppitunnilla oppilaiden työt järjestettiin lukujen suuruusjärjestyksen perusteella lukusuoralle ja pohdittiin myös vastaluvun käsitettä sekä ääretöntä, jonka eräs oppilaista oli valinnut tarkastelunsa kohteeksi. Äärettömän pohdinta nousi useamman kerran koko luokan puheenaiheeksi. Myöhemmin opettajan pohtiessa oppilastöiden tuloksia, hän havaitsi niissä selkeästi tiedon luonteeseen kuten yksityisyyteen tai yleisyyteen liittyviä eroja. Jotkut kuvista oli helppo tulkita, jotkut odottivat tekijän avaavan niiden tausta-ajatusta. Jotkut työt esittivät myös selkeämmin yhteisesti tunnettua symbolijärjestelmää, kun taas toiset loivat niistä omia tulkintojaan. Opettaja päätyi järjestämään kuvat uudelleen koulun seinälle nelikentäksi: Yksityinen tieto – yleinen tieto ja Yhteisesti sovittu järjestys – oma mielikuva (kuva 2). Tämä tehtävä olisi sopinut hyvin myös osaksi yhteistä luokkatyöskentelyä ja keskustelua.



Kuva 2. Ensimmäisen teeman oppilastyöt järjestettynä nelikenttään Yksityinen tieto – yleinen tieto ja Yhteisesti sovittu järjestys – oma mielikuva.

Havingan (2015) opetuskokeilun toisen teeman aiheena oli lajittelu ja luokittelu kuvataiteen työskentelytapana. Työskentely aloitettiin tällä kertaa kuvataiteen oppitunnilla. Tehtävä yhdisti ryhmässä tekemistä, nykytaiteen työmenetelmiä, valokuvausta, kokeilua, leikittelyä, sommittelua ja myös kuvankäsittelyohjelmaan tutustumista.

Tunti aloitettiin tutustuen nykytaiteeseen ja sen työskentelymenetelmiin. Esimerkkinä toimi Antti Laitisen teos *Forest Square* (www.anttilaitinen.com). Työssään taiteilija hajotti aarin metsää osiin eri materiaaleihin ja rakensi uuden tavan nähdä metsä. Oppilaiden tehtävänä oli hajottaa kasvi juurineen tai hedelmä eri tekstuureihin ja koota se uudestaan lajitellen ja luokitellen visuaalisesti kiinnostavaksi teokseksi. Koko prosessi valokuvattiin ja lisäksi jokainen tekstuuri mitattiin tilavuudeltaan ja punnittiin. Kuvakoosteessa (kuva 3) nähdään eri työskentelyvaiheita.

Kuva 3. Esimerkkejä toisen teeman kuvataiteen oppilastöistä.

Työskentelyä jatkettiin matematiikan tunnilla, jossa mittausten perusteella laskettiin, kuinka monta grammaa kutakin tekstuuria oli verrattuna työn kokonaismassaan. Tulokset esitettiin sekä murtolukuina, desimaalilukuina että prosentteina. Lopuksi oppilaat esittivät työnsä koko luokalle ja yhdessä pohdittiin lajittelun ja luokittelun merkitystä matematiikassa.

Perustuen näihin kokemuksiin kuvataidetta ja matematiikkaa integroivista ilmiöistä lähdimme selvittämään Helsingin yliopiston matematiikkaa pää- tai sivuaineenaan opiskeleville aineenopettajaopiskelijoille suunnatulla kyselyllä, mitä ovat matematiikan ilmiöt tulevien matematiikan opettajien näkemysten mukaan.

Ainedidaktiikan perusteet -kurssin seminaarissa syksyllä 2015 eheyttämistä käsittelevän ryhmätapaamisen aloitukseksi opiskelijat saivat hetken pohtia aihetta itsekseen ja vastata kirjallisena avoimeen kysymykseen: Mitä mielestäsi ovat matemaattiset ilmiöt? Opiskelijoille kerrottiin vastausten muodostavan tutkimusaineiston ja ettei lomaketta tarvitse palauttaa, mikäli ei halua osallistua tutkimukseen. Kahta opiskelijaa lukuun ottamatta (3,8 %) kaikki palauttivat vastauksensa (N=51). Seminaari jatkui eheyttämisteeman käsittelyllä ja opiskelijat saivat tutustua edellä esitettyihin opetuskokeiluihin vierailijana toimineen Mirka Havingan johdolla.

Matematiikan opettajaopiskelijoiden vastaukset kirjoitettiin sähköiseen muotoon ja analysoitiin aineistolähtöisesti. Ensimmäisessä vaiheessa jokainen vastaus käytiin läpi etsien kuvaussanoja (ks. esimerkki alla), joita aineistosta lopulta löytyi 52 kpl.

> #23
>
> En osaa antaa esimerkkiä tietystä ilmiöstä, mutta loogiseen päättelyyn voisi olla luonteva yhdistää. Arkkitehtuuri, kultaisen leikkauksen etsiminen luonnosta ja kuvataiteesta.

Näistä muodostettiin taulukko (taulukko 2), jota käytettiin luokittelun apuna. Tähän taulukkoon listattiin kaiken kaikkiaan 202 poimintaa aineistosta.

Taulukko 2. Esimerkki matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden vastausten analyysistä.

Lukumäärä	Kuvaussana	Poiminnat aineistosta
5	mallintaminen	matemaattisesti mallinnetut, tautien mallintaminen, matemaattisesti mallintaa, voidaan mallintaa, voidaan mallintaa
7	taide	taiteesta, kuvataiteesta, taide, kuvataiteesta, kuvataiteessa, Kuvataiteesta, kuvataiteessa
4	havainnot	havaintoja, havaintojen välisiä eroja/ yhtäläisyyksiä, havainto, visuaalisesti havainnoitavaa

Lopulta päädyttiin kolmeen lähes yhtä suureen kategoriaan:

- matematiikan sisäiset ilmiöt (28 %)
- matemaattiset ilmiöt luonnossa (34 %)
- matemaattiset ilmiöt kulttuuriympäristössä (38 %).

YHTEENVETO TULOKSISTA

Kuvataidetta ja matematiikkaa eheyttävässä 7. luokan opetuskokeilussa (Havinga, 2015) etsittiin kahden teeman avulla keinoja säilyttää oppiaineiden itseisarvo ja eheyttää niitä mielekkäästi toisiinsa. Avoimet teemat ja prosessinomainen työskentely ovat tyypillisiä kuvataiteen opetuksessa, mutta ensimmäisestä opetuskokeilun teemasta havaittiin, että avoimuuden lisääminen matematiikan opetukseen toi oppitunneille uudenlaista tutkivaa ja keskustelevaa ilmapiiriä. Kokonaislukujen tutkiminen lukujonoja muodostamalla ja erilaisia perusteluja tutkimalla herätti oppilaita huomaamaan, miten saman lukujonon voi perustella eri tavoin, miten jotkut perustelut ovat matemaattisempia kuin toiset ja miten sääntö voidaan kirjoittaa yleiseen muotoon. Erityisesti äärettömyyteen liittyvät keskustelut olivat antoisia. Kuvataiteen oppitunnilla tehtävä johdatteli semioottiseen taidenäkemykseen. Oppitunnilla pohdittiin muun muassa sitä, millä tavoin kuvat viittaavat kulttuurissamme vallitseviin itsestäänselvyyksiin. Molemmissa tehtävissä oli erotettavissa sama ymmärtämisen polku: havaintojen tekeminen, oma työskentely, toisin näkeminen ja ymmärtäminen.

Toisessa opetuskokeilun teemoista päädyttiin vastaavuuden ja representaation käsitteisiin, ja intuitioon toiminnan ohjaajana, jotka jälleen kerran yhdistävät matematiikkaa ja kuvataidetta keskenään. Matemaattinen ajattelu näyttäytyi selkeimmin juuri lajittelussa ja luokittelussa, vaikka oppilaat tunnistivatkin pikemminkin mittaukset ja laskemisen heille tutuksi matematiikaksi. Matematiikan tunnilla keskeinen käsitteellinen löytö oli suhteen ymmärtäminen ”kuinka pieni kukka on suhteessa tarvitsemansa mullan määrään”. Prosenttiluvun, murtoluvun ja desimaaliluvun yhteys sen sijaan oli jo entuudestaan tuttu asia. Kiinnostavia keskusteluja heräsi myös siitä, mitä mittausten epätarkkuus saa aikaan ”näiden prosenttilukujen summaksi ei tuukaan 100 %”.

Matematiikan ilmiöitä kartoittavan kyselyn tuloksena (ks. taulukko 3) eheyttäviin oppimiskokonaisuuksiin kannattaa matematiikan näkökulmasta valita ilmiöitä, jotka perustuvat matemaattisiin ominaisuuksiin, kuten rakenteet, säännönmukaisuudet, riippuvuudet ja suhteet, tai matemaattisiin prosesseihin, jotka ovat matematiikan tiedonhankinnalle ja toimintakulttuurille tyypillisiä, kuten looginen päättely, ongelmanratkaisu ja todistaminen.

Taulukko 3. Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden näkemyksiä siitä, mitä ovat matemaattiset ilmiöt.

		Yhteensä	
Kategoria	Esimerkkejä (lkm)	*f*	%
Matematiikan sisäiset ilmiöt	Säännönmukaisuudet (9), lineaarisuus, jaksollisuus, suppenevuus, äärettömyys (7), muodot (6), laskeminen, lukumäärä (6), riippuvuudet (5), looginen päättely (4), symmetria (3), ongelmanratkaisu (3), rakenteet ja suhteet (3), vektorit, avaruudet (3) yleistäminen, yksittäistapaukset (3) jaollisuus (2), todistaminen (1) lukujen ainutlaatuisuus (1)	56	28 %
Matemaattiset ilmiöt luonnossa	Tapahtumat, havainnot (17), luonnon ilmiöt (15), kemialliset ja fysikaaliset ilmiöt (12), geometriset ilmiöt (10), kultainen leikkaus (6), kaaos (2), fraktaalit (2), tähtikuviot (1), vuosirenkaat (1), kasvit (1), lumihiutaleet (1), entropia (1)	69	34 %
Matemaattiset ilmiöt kulttuuriympäristössä	Raha, talous, verotus, palkka (11), musiikki, taide (10), arjen ilmiöt (10), todennäköisyydet, pelit (10), mallit (8), arkkitehtuuri (6), mittaaminen, suureet (4), rakentaminen (4), ruoanlaitto (3), tilastot (3), yhteiskunnalliset ilmiöt (2), sovellukset (2), matkustus (2), ammatit (1), matematiikka historiallisena ilmiönä (1)	77	38 %
Yhteensä		202	100 %

Toinen kiinnostava lähestymistapa rakentaa eheyttäviä oppimiskokonaisuuksia on tutkia elollisessa luonnossa ja kulttuuriympäristössä ilmeneviä ilmiöitä, jotka ovat mallinnettavissa tai kuvailtavissa matematiikan keinoin. Ihminen myös itse tuottaa ympäristöön matemaattisia ilmiöitä, kuten musiikkia, arkkitehtuuria ja taidetta sekä hallitsee yhteiskunnallisia ja taloudellisia ilmiöitä matematiikan välinein.

POHDINTA

Kuvataidetta ja matematiikkaa eheyttäviä monitieteisiä oppimiskokonaisuuksia perusopetuksen 7.-9. luokille suunniteltaessa tulee miettiä, miten se toteutetaan niin, että kummankin oppiaineen luonne ja tyypilliset tavat rakentaa tietoa huomioidaan tasavertaisina. Tiedonalapohjaisessa eheyttävässä opetuksessa pedagogisesti hyvä ilmiö on ilmiö, jolle löytyy käsitetasolla liittymäkohtia sekä kuvataiteesta että matematiikasta, kuten opetuskokeilussa representaatio tai suhde. Lisäksi ilmiön on oltava riittävän avoin, jotta se mahdollistaa monenlaisten kysymysten, ratkaisujen ja käsittelytapojen käytön. Silloin oppilaiden tuottamat oivallukset ovat uusia opettajallekin ja oppilaiden ja opettajan yhteinen oppiminen yhdistää luokkaa ja motivoi oppimaan. Pedagogisesti hyviä ilmiöitä valittaessa matematiikan opettajaopiskelijoiden vastauksista saatu kolmijako voi auttaa jäsentämään, onko valittu ilmiö matematiikan sisäistä eheyttämistä vai oppiaineita yhdistävää eheyttämistä.

Monesti matematiikkaa ja kuvataidetta yhdistävät aiheet, jotka liittyvät luonnossa havaittaviin ilmiöihin ja rytmeihin tai ihmisen kulttuuriympäristön havainnointiin. Tutkimuksemme nostavat kuitenkin esiin ideoita myös matematiikan sisäisen logiikan pohtimiseen ja tarkasteluun. Tällaiset matemaattiset ilmiöt nostavat katseen pois laskutaidosta ja siirtävät sitä matematiikan havaitsemiseen ympärillämme. Monet käsitteet ja tiedonhankinnan ja -rakentelun keinot ovat yhteisiä eri oppiaineille.

Eheyttämisen lähtökohta voi myös olla oppilaan oma kokemus ja yhteisöllisyys (Halinen & Jääskeläinen, 2015). Tutkiva oppiminen työtapana sopiikin hyvin monialaisiin oppimiskokonaisuuksiin. Esitellyssä opetuskokeilussa prosessin aikana seurattiin polkuja, joita yhteinen luokassa tapahtuva ihmettely nosti pintaan. Tällainen opiskelu vahvistaa ryhmän ja opettajan yhteistä päämäärää omiin havaintoihin perustuvaa oppimista kohti. Se, mitä lopulta opitaan voi olla yllättävää. Ensimmäisessä teemassa yllättävää oli, että lopulta päädyttiin käsittelemään tiedon luonteeseen liittyviä kysymyksiä. Toisessa teemassa yllätti se, että oppilaat eivät kokeneet lajittelun ja luokittelun liittyvän matematiikkaan. Toivomme, että esittelemämme matematiikan ilmiöiden luokittelu tukee opettajaa ja ryhmää oppimistilanteessa hahmottamaan yllätysten laatua ja liittämään kysymyksiä osaksi kokonaisuutta. Se, miten tämän kaltainen opiskelu lisää esimerkiksi matematiikan käsitteiden hallintaa matemaattisissa tehtävissä, on vaikeasti mitattava asia. Kiinnostavaa on kuitenkin se, miten kuvataiteen keinoin matematiikan käsitteitä voi avata ja niiden hallintaa vahvistaa liittämällä niihin omakohtaisia kokemuksia ja keskustelua.

Uusi opetussuunnitelma (2014), Marjo Räsäsen (2010) esittämä integroivan kuvataideopetuksen pedagoginen malli sekä Portaankorva-Koiviston (2010) elämyksellistä matematiikan opetusta jäsentävä malli kannustavat etsimään ilmiöiden välisiä suhteita, uusia näkökulmia, monilukutaitoa ja omaan oppimiseen liittyvää henkilökohtaista tarttumapintaa. Oppimisen pääpaino on tuoreiden näkökulmien löytymisessä ja uteliaisuuden ja kiinnostuksen herättelyssä. Eheyttävässä tiedonalalähtöisessä oppimiskokonaisuudessa opitaan matematiikkaa ja kuvataidetta, mutta sen lisäksi se haastaa oppilaita pohtimaan, mitä matematiikka tai kuvataide oikeastaan on.

LÄHTEET

Brown, T. (2001). Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Halinen, I. & Jääskeläinen, L. (2015). Opetussuunnitelmauudistus 2016. Sivistysnäkemys ja opetuksen eheyttäminen. Teoksessa H. Cantell. (toim.) Näin rakennat monialaisia oppimiskokonaisuuksia. Juva: Bookwell Oy. PS-kustannus.

Havinga, M. (2015). YHDESSÄ VAI ERIKSEEN? Opetuskokeilu kuvataidekasvatuksen ja matematiikan opetuksen integraatiosta perusopetuksen seitsemännellä luokalla. Taiteen maisterin opinnäytetyö. Aalto-yliopisto. Taiteiden ja suunnittelun korkeakoulu. Taiteen laitos, kuvataidekasvatus.

Hurley, M. M. (2001). Reviewing integrated science and mathematics: The search for evidence and definitions from new perspectives. School Science and Mathematics, 101(5), 259-268.

Hähkiöniemi, M. (2011). Johdatus GeoGebra-avusteiseen tutkivaan matematiikkaan. Teoksessa M. Hähkiöniemi (toim.) GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa: tutkimuksia opettajan ja oppilaiden toiminnasta. Jyväskylän yliopisto, opettajankoulutuslaitos.

POPS. 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Vahvistettu 22.12.2014. Helsinki: Opetushallitus. http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). Elämyksellisyyttä tavoittelemassa – narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta. Acta Universitatis Tamperensis, 1550. Tampereen yliopisto.

Räsänen, M. (2010). Taide, taitaminen ja tietäminen-kokonaisvaltaisen opetuksen lähtökohtia. Synnyt/Origins-verkkojulkaisu, 3(2010), 48-61.

AKATEEMINEN LUKUTAITO MATEMATIIKASSA

Jorma Joutsenlahti & Pirjo Kulju

Tampereen Yliopisto

Judith Moschkovich on esittänyt kuvauksen akateemisesta lukutaidosta matematiikassa. Se koostuu kolmesta komponentista: matemaattisesta osaamisesta, matemaattisista käytänteistä ja diskursseista. Olemme kehittäneet tästä mallista oman mallin, jonka mukaan tarkastelemme Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden matematiikan osuuksia luokilla 1-9. Kaikkien kolmen komponentin keskeiset sisällöt on löydettävissä matematiikan opetussuunnitelman perusteista. Pohdimme lopuksi akateemisen lukutaidon ja monilukutaidon käsitteiden suhdetta.

JOHDANTO

Lukutaitoa (*literacy*) on tulkittu ja tutkittu monesta eri näkökulmasta ja siihen liittyviä lähikäsitteitä on useita, esimerkiksi teknologinen lukutaito, informaatiolukutaito, verkkolukutaito, kuvanlukutaito, visuaalinen lukutaito (Kupiainen, Kulju & Mäkinen 2015). Eri näkökulmia yhdistäväksi yläkäsitteeksi on noussut monilukutaito. On syytä muistaa, että kyseessä on moninainen, paitsi lukemiseen myös kirjoittamiseen tai tuottamiseen liittyvä osaamisalue (Kupiainen ym. 2015). Käsitteen taustalla on englanninkielinen termi *multiliteracy*, jolla tarkoitetaan sitä, että erilaisissa sosiaalisissa konteksteissa on erilaisia tekstikäytänteitä; nämä sosiaaliset kontekstit voivat liittyä esimerkiksi eri oppialoihin (Kalantzis & Cope 2012).

Judith Moschkovich (2015a, 2015b) puolestaan käyttää käsitettä akateeminen lukutaito (*academic literacy*) tarkastellessaan lukutaitoa matematiikan opiskelussa. Tässä artikkelissa tulkitsemme Moschkovichin (emt.) mallia ja sovellamme sitä Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin matematiikassa.

Lukutaidon moninaisuuden myötä monilukutaito nostettiin Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) yhdeksi laaja-alaiseksi osaamiskokonaisuudeksi. Koska monilukutaito on näin vahvasti esillä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [1] (2014), tarkastelemme sitä seuraavassa tarkemmin ja pyrimme myöhemmin myös pohtimaan sen suhdetta Moschkovichin akateemiseen lukutaitoon. Monilukutaito määritellään opetussuunnitelman perusteissa seuraavasti (POPS 2014, 20):

> ”*Monilukutaidolla tarkoitetaan erilaisten tekstien tulkitsemisen, tuottamisen ja arvottamisen taitoja, jotka auttavat oppilaita ymmärtämään monimuotoisia kulttuurisia viestinnän muotoja sekä rakentamaan omaa identiteettiään. Monilukutaito perustuu laaja-alaiseen käsitykseen tekstistä. Teksteillä tarkoitetaan tässä*

[1] Lyhennetään POPS

> *sanallisten, kuvallisten, auditiivisten, numeeristen ja kinesteettisten symbolijärjestelmien sekä näiden yhdistelmien avulla ilmaistua tietoa.”*

Oppilaiden monilukutaidon kehittäminen lähtee arkikielen käytöstä kohti kunkin oppiaineen tiedonalan kielen ja esitystapojen hallintaa. Monilukutaitoa opitaan käyttämällä, tulkitsemalla ja tuottamalla erilaisia tekstejä sekä yksin että yhdessä muiden kanssa (emt., 21). Matematiikan opiskelussa oppilas kohtaa muun muassa seuraavia symbolijärjestelmiä matematiikkaan liittyvissä teksteissä: symbolikieltä, luonnollista kieltä (yleensä äidinkieltään) ja kuvioita. Näiden avulla matematiikan teksteissä, kuten oppikirjoissa, luodaan merkityksiä matemaattisille käsitteille. Toisaalta oppilas voi eri symbolijärjestelmiä käyttämällä ilmaista matemaattista ajatteluaan suullisesti tai kirjallisesti eli kielentää (ks. Joutsenlahti & Kulju 2015).

Moschkovich kuvaa akateemisen lukutaidon matematiikassa laajemmin kuin vain semiotiikan teorian lähtökohdista (Moschkovich 2015a, 2015b; vrt. Kupiainen ym. 2015, 17). Hän nimittäin rakentaa matemaattisen toiminnan kuvauksen akateemisessa lukutaidossa kolmesta näkökulmasta: kognitiivisesta, sosiokulturaalisesta ja diskursiivisesta näkökulmasta (Moschkovich 2015a, 77). Tarkastelemme seuraavassa Moschkovichin (2015a, 2015b) akateemisen lukutaidon mallia ja esittelemme sen pohjalta kehittelemäämme mallia, jossa näkökulmana on oppilas ja hänen matemaattinen ajattelunsa. Tutkimustehtävämme on tarkastella Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden (2014) matematiikan tavoitekuvauksia kaikilla luokkatasoilla mukaillun akateemisen lukutaidon näkökulmasta.

AKATEEMINEN LUKUTAITO

Moschkovich (2015a, 2015b) kuvaa akateemisen lukutaidon matematiikassa koostuvan kolmesta toisiinsa integroituneesta komponentista: matemaattisesta osaamisesta (*mathematical proficiency*), matemaattisista käytänteistä (*mathematical practices*) ja matemaattisesta diskurssista (*mathematical discourse*). Matemaattisen toiminnan tarkastelun näkökulmista matemaattinen osaaminen edustaa kognitiivista, matemaattiset käytänteet sosiokulturaalista ja viimeksi mainittu diskursiivista näkökulmaa.

Sosiokulturaalisessa viitekehyksessä oppimista tarkastellaan asteittain syvenevänä osallistumisen prosessina, jonka aikana opitaan käyttämään yhteisön materiaalisia (esimerkiksi kynät, kompassit, tietokoneet) ja psykologisia työkaluja (esimerkiksi käsitteet, symbolit, erilaiset kielet) (Rajala, Hilppö, Kumpulainen, Tissari, Krokfors & Lipponen 2010). Esimerkiksi matematiikan sanallisen tehtävän ratkaisussa oppilaan toiminnan kuvaamiseen ei riitä vain kognitiivinen näkökulma, jota on muun muassa matemaattinen päättely ja proseduraalinen sujuvuus. Edellä mainittujen lisäksi oppilaalla on oltava lisäksi kompetenssia tunnistaa tekstilaji, ymmärtää lukemansa teksti ja nähdä siitä ne merkitykselliset tiedot, jotka ohjaavat ratkaisustrategioiden käyttöä

(Moschkovich 2015a). Toisin sanoen oppilas ensin tunnistaa esimerkiksi matematiikan sanallisen tehtävän tekstilajina ja ymmärtää sen sisällön, joka voi muodostua luonnollisesta kielestä, symbolikielestä ja kuvioista. Näin ollen hän hallitsee oppiaineelle tyypillistä diskurssia ja käyttää metakognitiivisia taitojaan ratkaistessaan tehtävää.

Moschkovich (2015a, 2015b) tarkastelee akateemisen lukutaitoa matematiikassa oppilailla, joilla matematiikan opetus on englanninkielistä, mutta oppilaiden äidinkieli on jokin muu. Kuvattu käsite sopii kuitenkin hyvin myös oppilaan äidinkielellä annetun matematiikan opetuksen kuvaukseen.

Matemaattinen osaaminen

Moschkovich (2015a) on todennut vuonna 2001 julkaistun matemaattisen osaamisen mallin olevan edelleen pätevä kuvaamaan akateemisen lukutaidon kognitiivista aluetta. Tämä Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin (2001) malli esittää matemaattisen osaamisen (*mathematical proficiency*) koostuvan viidestä piirteestä: 1. käsitteellinen ymmärtäminen, 2. proseduraalinen sujuvuus, 3. strateginen kompetenssi, 4. mukautuva päättely ja 5. yritteliäisyys (ks. myös Joutsenlahti 2005, 96).

Käsitteellinen ymmärtäminen sisältää ymmärryksen matemaattisista käsitteistä ja niiden välisistä suhteista sekä matemaattisista operaatioista ja niiden yhteyksistä matemaattisiin käsitteisiin (Kilpatrick ym. 2001, Joutsenlahti 2005). Käsitteellinen ymmärtäminen näkyy niistä merkityksistä, mitkä matemaattisen tehtävän ratkaisija antaa ratkaisulle (Mitä tulos tarkoittaa tehtävänannon näkökulmasta?), ratkaisuprosessille (Miksi valitut proseduurit ja menetelmät toimivat tässä ratkaisussa?) ja lopulliselle vastaukselle (Miksi vastaus on oikein tähän tehtävään?) (Moschkovich 2015a).

Proseduraalinen sujuvuus näkyy taitona käyttää matemaattisia proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti (Kilpatrick ym. 2001, Joutsenlahti 2005). Koulussa korostuu erityisesti aritmetiikassa mekaanisen laskemisen osuus, mutta käsitteelliseen ymmärtämiseen liittyy usein myös oleellisena osana laskennallinen osaaminen ja toisaalta myös päinvastoin (Moschkovich 2015a). Strateginen kompetenssi on kykyä muotoilla, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia, jotka eivät ole rutiininomaisia (Kilpatrick ym. 2001, Joutsenlahti 2005). Ongelmanratkaisussa edellä kuvattu osaamisen piirre on keskeinen. Mukautuva päättely on loogista ajattelua, pohdintaa, selityksien löytymistä ja todistamista (emt.). Viimeisenä mainittu matemaattisen osaamisen piirre ”yritteliäisyys” kuvastaa oppijan käsityksiä matematiikan tärkeydestä ja hyödyllisyydestä sekä omasta ahkeruudesta ja tehokkuudesta matematiikan opiskelussa (emt.). Korvaamme sen tässä yhteydessä käsitteellä matematiikkakuva (*view of mathematics*), jota muun muassa Joutsenlahti (2005) on käyttänyt.

Edellä kuvatut viisi matemaattisen osaamisen piirrettä muodostavat akateemisen lukutaidon kognitiivisen komponentin, jossa on kuitenkin runsaasti yhtymäkohtia kahteen muuhun komponenttiin.

Matemaattiset käytänteet

Yhdysvalloissa *Common Core State Standards*[2] (2010) määrittelee kahdeksan matemaattista käytännettä (*mathematical practices*), joita voidaan tulkita matematiikan opetuksessa esiopetuksesta lukio-opetukseen asti. Kuvatut käytänteet ohjaavat oppilaita matemaattisten ongelmien ratkaisuprosessien aloittamiseen ja hallintaan. Matemaattiset käytänteet ovat (CCSS 2010): 1. ymmärrä ongelmat ja ole pitkäjänteinen etsiessäsi ratkaisua, 2. päättele abstraktisesti ja kvantitatiivisesti, 3. perustele oma ratkaisusi muille ja ole rakentavan kriittinen erilaisiin ratkaisuihin, 4. mallinna matematiikalla, 5. käytä asianmukaisia työkaluja strategisesti, 6. pyri täsmällisyyteen, 7. etsi ja käytä rakenteita ja 8. etsi ja ilmaise säännönmukaisuuksia toistuvassa päättelyssä.

Ensimmäisenä tavoitteena on annetun ongelman ymmärtäminen, jolloin matemaattisesti osaava oppilas aloittaa ongelman ratkaisun selittämällä ensin itselleen ongelman merkitykselliset piirteet ratkaisun kannalta. Oppilas käyttää tyypillisiä ongelmanratkaisumenetelmiä (esimerkiksi analogisten ongelmien ratkaisut, erikoistapausten ratkaiseminen ensin, jne.) johdonmukaisesti ja pitkäjänteisesti samalla tarkastellen ja arvioiden omaa ratkaisuprosessiaan. Toiseksi oppilaan on tehtävä abstrakteja ja määrällisiä päätelmiä tehtävästä. Osaava oppilas ymmärtää tehtävässä annettujen lukujen tai muuttujien merkityksen ja niiden suhteet toisiinsa tehtävässä. Hänellä on taitoa kontekstualisoida tehtävä uudelleen siten, että hän osaa kuvata tehtävässä annetut tiedot ja niiden välisiä suhteita matemaattisin symbolein sekä sieventää lausekkeita ja ratkaista yhtälöitä. (CCSS 2010, Moschkovich 2015a.)

Kolmantena on taito kuvata ja perustella omat valinnat ja ratkaisuprosessin vaiheet sekä esittää omat perustellut näkemykset toisten oppilaiden ratkaisuista (CCSS 2010). Suomalaisessa ainedidaktisissa tutkimuksissa on tässä yhteydessä käytetty kielentämisen käsitettä (esimerkiksi Joutsenlahti & Kulju 2012, Joutsenlahti & Rättyä 2015). Neljäntenä ja viidentenä ovat taidot mallintaa annettuja tilanteita matemaattisesti ja käyttää asianmukaisia matemaattisia työkaluja ongelmien ratkaisussa strategisesti mielekkäällä tavalla. Esimerkiksi tietotekniikan (esimerkiksi graafiset laskimet ja tietokoneet) hyödyntäminen ensin kuvaajia tutkimalla ja niiden perusteella varsinaisen ratkaisun konstruointi algebrallisin menetelmin on yläkoulussa ja lukiossa keskeinen taito.

[2] Lyhennetään CCSS.

Kolmessa viimeksi mainitussa tavoitteessa oppilas pyrkii aina ilmaisemaan itsensä täsmällisesti kuvatessaan ratkaisuaan tai keskustellessaan muiden oppilaiden kanssa. Ratkaisua etsiessään hän pyrkii löytämään tehtävästä selkeitä rakenteita ja hyödyntämään niitä ratkaisussaan. Toistaessaan ratkaisuprosessin yhteydessä samaa proseduuria hän pyrkii löytämään toistoista säännöllisyyttä ja keksiä yleisen tavan tehdä proseduuri lyhyemmin halutuilla arvoilla. (CCSS 2010, Moschkovich 2015a.)

Edellä kuvatut kahdeksan tavoiteltavaa käytännettä matemaattisen ongelman ratkaisussa kuvaavat matemaattisesti osaavan oppilaan ongelmanratkaisuprosessin toimintoja, joita ohjaa oppilaan matemaattinen ajattelua kuvaavan matemaattisen osaamisen piirteiden tasapainoinen kehitys (vrt. Joutsenlahti 2005). Kuvassa 1 olemme jakaneet edellä mainitut kahdeksan käytännettä hienojakoisemmin kymmeneksi oppilaan matemaattista toimintaa edesauttavaksi käytänteeksi, jotka auttavat erityisesti oppilaan matemaattisten ongelmien ratkaisussa.

Matemaattisen ajattelun ilmaisu

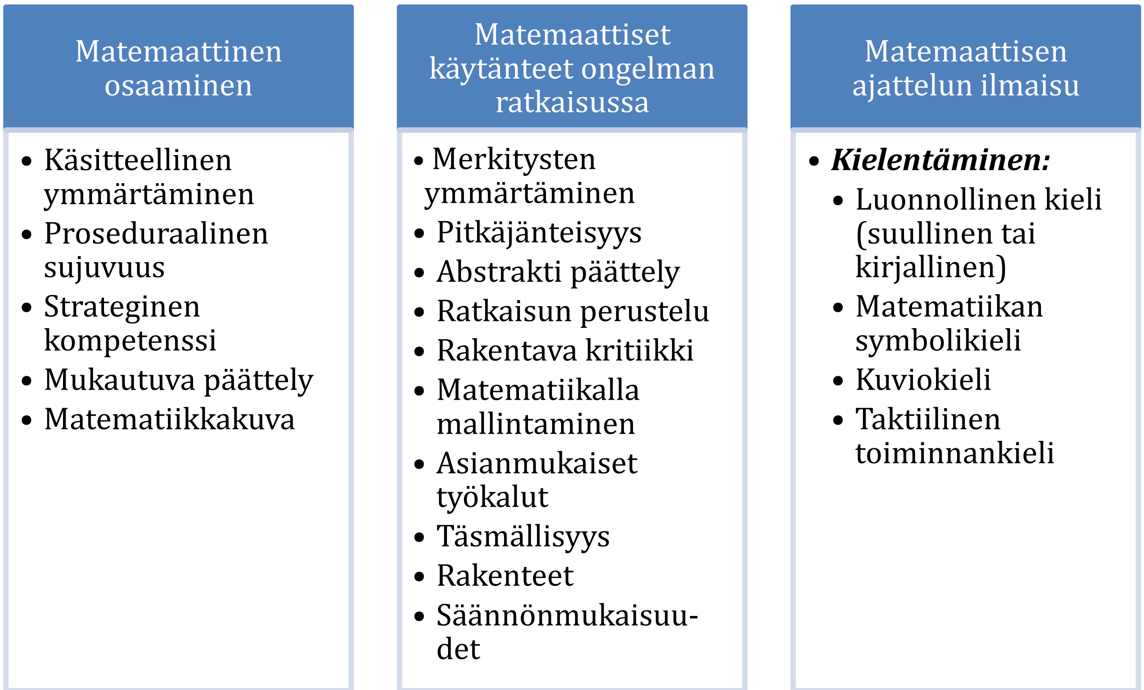
Moschkovichin (2015a, 2015b) mallissa kolmantena komponenttina mainitaan diskurssi. Hän korostaa sitä, että matemaattinen diskurssi on laajempi käsite kuin matematiikan opiskelussa käytetty kieli. Kielitoimiston sanakirja määrittää diskurssin jotakin alaa koskevien vuorovaikutustapojen kokonaisuudeksi. Moschkovich (2015a, 83) määrittelee matemaattisen diskurssin vielä tarkemmin sellaiseksi kommunikaatiokompetenssiksi, joka mahdollistaa osallisuuden matemaattisiin käytänteisiin.

Hänen mukaansa matemaattinen diskurssi sisältää suullisten ja kirjoitettujen tekstien lisäksi myös monia moodeja (tai symbolijärjestelmiä), kuten eleitä, toimintamateriaaleja, piirroksia, taulukoita, kuvaajia, matemaattisia symboleja jne. Vuorovaikutukseen kuuluvat myös erilaiset rekisterit, kuten koulumatematiikan kieli ja toisaalta kotikieli. (Moschkovich 2015a, 77.) Moschkovich (2015a, 83) korostaa, että matemaattisen diskurssin määrittelyssä tulisi välttää vastakkainasettelua formaalin matematiikan kielenkäytön, kuten käsitteiden oppikirjamääritteiden, sekä oppilaan oman arjen rekisterin välillä.

Tarkasteltaessa akateemista lukutaitoa ja sen komponentteja olemme kuitenkin valinneet keskiöön matematiikkaa opiskelevan oppilaan ja diskurssin sijasta nimenneet kolmannen komponentin "matemaattisen ajattelun ilmaisuksi" (Kuva 1).

Toisin sanoen matemaattisen osaamisen piirteet kuvaavat mainitun oppilaan kognitiivista potentiaalia ja oppilaalle annettujen matemaattisten käytänteiden omaksuminen kuvaa matemaattista toimintaa opiskelu- ja ratkaisuprosesseissa. Kuvassa 1 esitetty mallimme kolmas komponentti, matemaattisen ajattelun ilmaisu, ikään kuin ohjaa edellä mainittua toimintaa. Sen taustalla on oppilaan matemaattinen ajattelu, joka rakentuu olemassa olevien tietojen ja taitojen rajoissa (ks. Joutsenlahti 2005). Tähän ajattelun rakentumiseen liittyy myös ajattelun ilmaisu, jossa oppilas kielentää ajatteluaan matematiikalle tyypillisellä tavalla monipuolisesti kieliä hyödyntäen (esim. Joutsenlahti & Rättyä 2015). Matemaattista toimintaa ohjaa myös kommunikaatio muiden oppilaiden kanssa, ja tässä vuorovaikutuksessa voi myös syntyä matemaattista tietoa ja ymmärrystä.

Lukutaidon näkökulmasta oppilas ilmaisee matemaattista ajatteluaan luonnollisen kielen, matematiikan symbolikielen, kuviokielen ja/tai taktiilisen[3] toiminnankielen kautta (Joutsenlahti & Rättyä 2015, Joutsenlahti & Kulju 2015). Moschkovichin (2015a, 2015b) käyttämän diskurssin piirteistä esimerkiksi erilaiset luonnollisen kielen rekisterit voivat olla osa matemaattisen ajattelun ilmaisua. Niin ikään matemaattista ajattelua voidaan ilmaista erilaisia symbolijärjestelmiä (tai kieliä) käyttämällä erilaisissa teksteissä, esimerkiksi sanallisissa tehtävissä, kertomuksissa tai oppitunnin suullisissa esitystilanteissa (Joutsenlahti, Kulju & Tuomi 2012).



Kuva 1. Akateemisen lukutaidon komponentit matematiikan opiskelussa oppilaan näkökulmasta Moschkovichia (2015a, 2015b) ja Joutsenlahtea mukaillen (Joutsenlahti & Rättyä 2015, Joutsenlahti & Kulju 2015)

[3] tuntoaistiin perustuva *(engl. tactile)*

AKATEEMINEN LUKUTAITO MATEMATIIKAN OPETUSSUUNNITELMAN PERUSTEISSA

Tarkastelemme akateemisen lukutaidon komponentteja Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014) matematiikassa luokkatasoilla 1-9. Matemaattisen osaamisen viisi piirrettä ovat löydettävissä mainittujen luokkien (luokat 1-2, 3-6 ja 7-9) tavoitteista. Tutkimusmenetelmämme on lähinnä teoriasidonnainen sisällönanalyysi, jossa aineistona on POPS (2014) tavoitteet matematiikan osalta. Aineistoa tarkastellaan Kuvan 1 akateemista lukutaitoa kuvaavien komponenttien mukaisesti.

Matemaattinen osaaminen

Taulukkoon 1 olemme koonneet esimerkkejä matematiikan viidestä osaamisen piirteestä opetussuunnitelman perusteissa eli Kuvan 1 ensimmäisestä komponentista. Esimerkiksi 1. ja 2. luokkien oppimisprosessin kannalta keskeisissä arvioinnin ja palautteen antamisen kohteissa neljä kognitiivista piirrettä, jotka seuraavassa on merkitty sulkuihin, näkyvät seuraavasti: 1) lukukäsitteen ymmärtämisessä ja lukujonotaidoissa (käsitteellinen ymmärtäminen), 2) kymmenjärjestelmän ymmärtämisessä (käsitteellinen ymmärtäminen), 3) laskutaidon sujuvuudessa (proseduraalinen sujuvuus), 4) kappaleiden ja kuvioiden luokittelun taidoissa (mukautuva päättely) ja 5) matematiikan käyttämisessä ongelmanratkaisussa (strateginen kompetenssi).

Taulukko 1. Esimerkkejä matemaattisen osaamisen piirteistä perusopetuksen opetussuunnitelmien (2014) matematiikan tavoitteissa (Kirjainlyhenne T yhdistettynä lukuun viittaa opetussuunnitelman tavoitteiden indeksointiin, ks. POPS 2014; 134–135, 260–261, 428–429)

Matemaattinen osaaminen	lk 1-2	lk 3-6	lk 7-9
Käsitteellinen ymmärtäminen	*T10 ohjata oppilasta ymmärtämään mittaamisen periaate (T5, T6, T7)*	*T2 ohjata oppilasta havaitsemaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä (T8, T9)*	*T12 tukea oppilasta laajentamaan lukukäsitteen ymmärtämistä reaalilukuihin (T13, T14, T15, T16, T17)*
Proseduraalinen sujuvuus	*T8 ohjata oppilasta kehittämään sujuvaa peruslaskutaitoa luonnollisilla luvuilla … (T9, T11, T12)*	*T10 opastaa oppilasta saavuttamaan sujuva laskutaito päässä ja kirjallisesti hyödyntäen laskutoimitusten ominaisuuksia*	*T11 ohjata oppilasta kehittämään kykyään laskea peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla (T14, T18, T19)*

Strateginen kompetenssi	*T4 ohjata oppilasta kehittämään päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan*	*T5 ohjata ja tukea oppilasta ongelmanratkaisutaitojen kehittämisessä*	*T5 tukea oppilasta loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa…(T9)*
Mukautuva päättely	*T12 harjaannuttaa oppilasta laatimaan vaiheittaisia toimintaohjeita ja toimimaan ohjeen mukaan (T2)*	*T3 ohjata oppilasta kehittämään taitoaan esittää kysymyksiä ja tehdä perusteltuja päätelmiä havaintojensa pohjalta (T4, T6, T11, T12, T13, T14)*	*T20 ohjata oppilasta kehittämään algoritmista ajatteluaan sekä taitojaan soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen (T6, T7, T10)*
Matematiikkakuva	*T1 tukea oppilaan innostusta ja kiinnostusta matematiikkaa kohtaan sekä myönteisen minäkuvan ja itseluottamuksen kehittymistä*	*T1 pitää yllä oppilaan innostusta ja kiinnostusta matematiikkaa kohtaan sekä tukea myönteistä minäkuvaa ja itseluottamusta*	*T1 vahvistaa oppilaan motivaatiota, myönteistä minäkuvaa ja itseluottamusta matematiikan oppijana*

Matemaattiset käytänteet

Kuvassa 1 on lueteltu kymmenen matemaattisen ongelman ratkaisuun ja sen esittämiseen liittyvää keskeistä toimintoa, joita voi pitää käytänteinä matemaattisissa ratkaisuprosesseissa. Kolmea ensiksi mainittua käytännettä (”ymmärrä annettu ongelma ja ole pitkäjänteinen etsiessäsi ratkaisua sekä päättele abstraktisti”) ei ole suoraan löydettävissä tavoitteista luokilta 1-2, 3-6 ja 7-9. Neljäntenä mainittu käytänne ”perustele oma ratkaisusi muille” on löydettävissä esimerkiksi luokkien 3-6 tavoitteissa (POPS 2014, 260): *T4 kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen*. Lisäksi se tulee esille myös luokkien 1-2 (T3) sekä luokkien 7-9 tavoitteissa (T3 ja S1) (POPS 2014; 135, 375). Viidentenä olevaa rakentavaa kritiikkiä ei ole erikseen mainittu, mutta se sisältyy yleisiin tavoitteisiin.

Kuudentena Kuvassa 1 oleva ”matematiikan avulla mallintaminen” tulee selkeimmin esille luokkien 7-9 tavoitteissa (POPS 2014, 374–375): *T7 rohkaista oppilasta soveltamaan matematiikkaa muissakin oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa* ja *T20 (--) soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen.* Asianmukaisten työkalujen käyttö tulee esille luokkien 7-9 tavoitteissa (emt., 429): *T9 opastaa oppilasta soveltamaan tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa sekä ongelmien ratkaisussa*. Tässä tuodaan esille teknologian tarkoituksenmukainen käyttö osana ratkaisuprosessia, mikä tulee olemaan keskeinen taito myös lukiomatematiikassa.

Kahdeksantena on kehotus täsmälliseen ilmaisuun matematiikassa. Tämäkin tulee esille vasta luokkien 7-9 tavoitteissa (emt., 429): *T4 kannustaa oppilasta harjaantumaan täsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun suullisesti ja kirjallisesti*. Tämä lienee perusteltu linjaus, sillä luokilla 1-6 matemaattisen ajattelun kehittymisen näkökulmasta on tärkeää ilmaista ajattelua ilman erillistä täsmällisyyden vaadetta. Jo pelkkä omin sanoin ilmaisu niin suullisesti ja kirjallisesti kehittää paitsi ilmaisijan ajattelua ja myös itse ilmaisua merkittävästi. Kahta viimeistä käytännettä kuvaa POPS:ssa (2014) sisältöalue *S1 ajattelun taidot.* Esimerkiksi luokkien 3-6 ajattelun taidoissa kuvataan matemaattisten rakenteiden ja säännönmukaisuuksien löytämisen taitoa (emt., 235): *Kehitetään oppilaiden taitoja löytää yhtäläisyyksiä, eroja ja säännönmukaisuuksia.* Vastaava kuvaus löytyy kaikilta muiltakin luokka-asteilta.

Matemaattisen ajattelun ilmaisu

Matemaattisen ajattelun ilmaisun merkitys eri kielillä (ks. Kuva 1) tulee selkeästi esille matematiikan osuuksissa. On huomattava, että ajattelun ilmaisu (kielentäminen) itsessään voi myös kehittää oppilaan omaa ajattelua eteenpäin. Tämä tukee opetussuunnitelmassa mainittua oppiaineen opetuksen tehtävää: ”kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua.”(POPS 2014, 128).

Matemaattisen ajattelun ilmaiseminen Kuvan 1 neljän kielen avulla näkyy luokka-asteilla seuraavasti:

1) 1.-2. lk: Opetus kehittää oppilaiden kykyä ilmaista matemaattista ajatteluaan konkreettisin välinein, suullisesti, kirjallisesti ja piirtäen sekä tulkiten kuvaa”(emt., 128)

2) 3.-6. lk: Opetus kehittää oppilaiden taitoja esittää matemaattista ajatteluaan ja ratkaisujaan eri tavoilla ja välineillä (emt., 234) ja

3) 7.-9 lk: Oppilaita ohjataan esittämään ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä (emt., 428).

Kaikilla luokka-asteilla korostetaan oppimista vuorovaikutuksessa muun ryhmän kanssa, jolloin keskeisenä on oma argumentointitaito ja rakentavan kritiikin antamisen taito (vrt. matemaattiset käytänteet Kuva 1).

Esimerkiksi luokkien 3-6 tavoite *T4 kannustaa oppilasta esittämään päättelyään ja ratkaisujaan muille konkreettisin välinein, piirroksin, suullisesti ja kirjallisesti myös tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen* (POPS 2014, 260) ja vastaavat tavoitteet muilla luokka-asteilla kuuluvat matemaattisten käytänteiden lisäksi myös matemaattisen ajattelun ilmaisun komponenttiin.

POHDINTA

Olemme tässä tutkimuksessa tarkastelleet perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita akateemisen lukutaidon näkökulmasta matematiikassa. Akateeminen lukutaito on erittäin laaja käsite, jonka voidaan ajatella kattavan sekä osaamisen, ongelman ratkaisun käytänteet että siihen liittyvän diskurssin. Diskurssi puolestaan liittyy laaja-alaisesti erilaisissa konteksteissa käytyyn vuorovaikutukseen. Olemme tässä tutkimuksessa fokusoineet näkökulmaa oppilaan ajatteluun ja sen kautta saaneet esille nämä kolme näkökulmaa opetussuunnitelman perusteissa. Näin ollen opetussuunnitelma näyttää tukevan akateemisen lukutaidon muokattua malliamme matematiikassa. Erityisen hyvin malli näyttäisi soveltuvan matemaattisen ongelmaratkaisuprosessien kuvaukseen kaikilla perusopetuksen luokka-asteilla.

Akateemisen lukutaidon malli syventää näkemystä siitä, mitä monilukutaito saattaisi merkitä, jos sitä tarkasteltaisiin tarkemmin yhden oppiaineen näkökulmasta. Matematiikan kannalta keskiöön nousee oppiaineen tietosisällön oppiminen, erilaiset oppimisprosesseihin liittyvät käytänteet sekä matemaattisen ajattelun ilmaisu. Saattaa olla, että monilukutaidon käsite ei itsessään kuitenkaan riitä kuvaamaan tätä akateemista oppimisprosessin puolta kokonaisuudessaan, vaikka käsitteen määritelmissä (kuten Luukka 2013; Kalantzis & Cope 2012) mainitaankin oppiaine- tai tieteenalakohtaiset lukutaidot ja tavat ilmaista asioita. On myös huomattava (vrt. Kupiainen ym. 2015), että opetussuunnitelmassa on esillä myös oppimisprosesseihin liittyvä näkökulma monilukutaidosta; mainitaanhan siinä, että ”monilukutaito tukee kriittisen ajattelun ja oppimisen taitojen kehittymistä” (POPS 2014, 21).

Kaiken kaikkiaan monilukutaito tarkoittanee matematiikan kannalta sitä, että oppilas hallitsee matematiikan oppiaineelle tyypilliset tavat ilmaista asioita; hän tunnistaa esimerkiksi oppikirjojen merkintätavat ja osaa itse tuottaa ja tulkita oppiaineeseen liitettyjä tekstejä. Näin ollen monilukutaito menee lähimmäksi mallimme kolmatta komponenttia, matemaattisen ajattelun ilmaisua.

Monilukutaidon ja akateemisen lukutaidon mallin suhdetta kuvannee parhaiten se, että matemaattinen osaaminen ja käytänteet ikään kuin suodattuvat monilukutaidon läpi matemaattisissa ajatteluprosesseissa.

LÄHTEET

Common Core State Standards (2010). *Common Core State Standards for Mathematical Practice.* <http://www.corestandards.org/Math/Practice/> (Luettu 5.2.2016)

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä: 1990-luvun pitkän matematiikan opiskelijoiden matemaattisen osaamisen* *ja uskomusten ilmentämänä*. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Tampere, Suomi: Tampereen yliopisto.

Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2015). Kielentäminen matematiikan ja äidinkielen opetuksen kehittämisessä. Teoksessa T. Kaartinen (toim.) *Monilukutaito kaikki kaikessa.* (s. 57–76) Tampere, Suomi: Tampereen yliopiston normaalikoulu.

Joutsenlahti, J., Kulju, P. & Tuomi, M. (2012). Matemaattisen lausekkeen kontekstualisointi sanalliseksi tehtäväksi ja tarinaksi. Opetuskokeilu kirjoittamisen hyödyntämisestä matematiikan opiskelussa.. Teoksessa K. Juuti & L. Tainio (toim.) *Ainedidaktinen tutkimus koulutuspoliittisen päätöksenteon perustana.* Ainedidaktisia tutkimuksia 4. (s. 107–122). Helsinki, Suomi: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura.

Joutsenlahti, J. & Rättyä, K. (2015). Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa. Teoksessa M. Kauppinen, M. Rautiainen & M. Tarnanen (toim*.) Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.–14.2.2014*. Ainedidaktisia tutkimuksia 8. (s. 45–61). Jyväskylä, Suomi: Suomen ainedidaktinen tutkimusseura.

Kalantzis, M. & Cope, B. (2012). *Literacies*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (toim.) (2001). *Adding it up*. Washington, DC, USA: National Academy Press.

Kupiainen, R., Kulju, P. & Mäkinen, M. (2015). Mikä monilukutaito? Teoksessa T. Kaartinen (toim.) *Monilukutaito kaikki kaikessa* (s. 13–24). Tampere, Suomi: Tampereen yliopiston normaalikoulu.

Luukka, M.-L. (2013). *Opetussuunnitelmat uudistuvat: tekstien lukijasta ja kirjoittajasta monilukutaituriksi.* Kielikoulutuspolitiikan verkosto, 10.12.2013. <http://www.kieliverkosto.fi/article/opetussuunnitelmat-uudistuvat-tekstien-lukijasta-ja-kirjoittajasta-monilukutaituriksi/> (Luettu 12.2.2016).

Moschkovich, J. N. (2015a). A sociocultural approach to academic literacy in mathematics for adolescent English learners: Integrating mathematical proficiency, practices, and discourse. Teoksessa D. Molle, E. Sato, T. Boals & C. A. Hedgspeth (toim.), *Multilingual learners and academic literacies: Sociocultural contexts of literacy development in adolescents* (s. 75–104). New York, USA: Routledge.

Moschkovich, J. N. (2015b). Academic literacy in mathematics for English learners. *Journal of Mathematical Behavior*. In press. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.005> (Luettu 20.1.2016)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki, Suomi: Opetushallitus. <http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf> (Luettu 18.1.2016)

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki, Suomi: Opetushallitus. <http://www.oph.fi/ops2016/perusteet> (Luettu 18.1.2016)

Rajala, A., Hilppö, J., Kumpulainen, K., Tissari, V., Krokfors, L. & Lipponen, L., 2010. *Merkkejä tulevaisuuden oppimisympäristöistä*. OPH Raportit ja selvitykset 2010:3. Helsinki, Suomi: Opetushallitus. <http://www.oph.fi/download/125495_Merkkeja_tulevaisuuden_oppimi symparistoista.pdf> (Luettu 18.5.2016)

LEARNING PHYSICS CONCEPTS – A DESCRIPTION IN TERMS OF RELATIONAL CONCEPTS

Tommi Kokkonen & Maija Nousiainen

University of Helsinki

Learning physics is a demanding and lengthy process. One reason for this is that students' prior knowledge is often at odds with scientific knowledge. However, the nature of students' knowledge and the nature of its change process are not clear. Recent research suggests that one crucial aspect of learning physics is learning its complex, relational knowledge. We synthesize research from cognitive science and science education research and develop a theoretical framework for concept learning. As an example we analyse empirical data of students' explanations of DC circuits. Their explanations had a very simple causal structure that reflects difficulties grasping the relational knowledge that ties the concepts together. Implications and importance of the theoretical work are discussed.

INTRODUCTION

Learning scientific concepts often requires that the learner modifies his or her prior knowledge, which can be difficult and take a long time. A well-known problem in learning physics, for example, is that learners' concepts often differ quite substantially from scientific ones in their meaning and content (see, e.g., Lee & Law, 2001). Even university students have naive beliefs concerning basic physic concepts.

Learning physics requires learning complex knowledge system (theory), which constrains and regulates the use of physics concepts. It entails learning multiple concepts and information about their co-variation, which is embedded in laws and models. However, students often conflate closely related concepts and use them in undifferentiated ways – examples include heat and temperature, voltage and electric current as well as weight and density (Lee & Law, 2001; C. Smith, Carey, & Wiser, 1985). This is often discussed from the viewpoint of concept differentiation. Furthermore, recent research has paid attention to learners' knowledge about the relational patterns inherent in laws and models of physics. Students are often inclined towards simple linear causal chains instead of, for example, emergent patterns of complex causality (Perkins & Grotzer, 2005).

Although we have gained insight about specific obstacles and biases in students learning of scientific concepts, we are still lacking description of particular cognitive mechanisms underlying concept learning and shared conception of concepts (Rusanen, 2014). One fruitful possibility could be closer integration of cognitive scientific models of concept learning into science education research. Recently, we (Koponen & Kokkonen, 2014; see also, Koponen & Huttunen, 2013) introduced so-called systemic view of concept learning, which leans on views about concepts as dynamic cognitive structures. Our previous studies have focused on students' explanations, their use of different relational patterns and the change in their ability to apply these different patterns in the context of DC circuits.

Likewise, our interest lies in relational knowledge. The principal focus of this paper is theoretical. We seek to extend the previous science education research by looking at the recent cognitive science literature on relational concepts, which shows that relational knowledge is a fundamental part of concepts and concept learning. In the empirical part of this paper we examine university students' explanations of DC circuits tasks.

The specific research questions are:

1) Based on the recent literature, what is the nature of physics concepts and the concept learning process?

2) What concepts and what kind of relations university students use in their explanations about DC circuit tasks?

The theoretical results and discussion offer a step forward in understanding the nature of the concept learning process and the cognitive processes underlying it. The theoretical ideas we present allow us to discern the roles of relational aspects of concepts in university students' understanding. In a previous study, we used interview data to analyse students' knowledge and identified three generic relational patterns. However, interview data may cause artefacts stemming from, for example, conversational pragmatics. Consequently, in this paper we applied the analysis method to examine students' written answers to similar tasks. Although the data only offers us a brief snapshot, together with the previous results and the theoretical ideas presented above it offers valuable information about the different possible learning outcomes.

STUDENTS' CONCEPTIONS OF DC CIRCUITS

While a rather mundane topic for physics experts, concepts related to DC circuits cause great difficulties even for university students. Previous studies have discovered multiple difficulties spanning from lack of sufficient models to false beliefs to not understanding the circuit topology.

Research has found out that students conflate closely related concepts such as voltage, current and energy (Koponen & Huttunen, 2013; Lee & Law, 2001; McDermott & Shaffer, 1992). For example, voltage is sometimes used interchangeably with current or voltage is thought as the amount of current stored in the battery (Reiner, Slotta, Chi, & Resnick, 2000). This kind of thinking is reflected in the naive explanations according to which something (electricity, current, energy, etc.) comes from the battery and is consumed by the bulbs (McDermott & Shaffer, 1992; Tarciso Borges & Gilbert, 1999). This also implies a difficulty of conceptualizing the circuit as a system, since the students often think that changes in one part of the circuit does not affect the other parts (McDermott & Shaffer, 1992). Often, students apply a kind of "sequential (or local) thinking" to circuits and think that the direction of the current and the ordering of the components matter. This is often accompanied by a belief that current is "used up" or diminished in a circuit so that, for example, bulbs connected in series would be unequal. Sometimes, even the idea of a closed circuit is lacking and students think that only a single wire is enough to light the bulb (Tarciso Borges & Gilbert, 1999).

Some intuitive explanations concentrate on the number of elements in the circuit, such as "more bulbs—less current" or "less bulbs—more current" (McDermott & Shaffer, 1992). This acknowledges some kind of relation between the components and the current but nevertheless fails to recognise the different connections. More advanced explanations may exploit some quantitative formulas but fail to recognize such elements as different connections and thus arrive at false predictions about the behaviour of the circuit.

Science education research has identified a range of "misconceptions" and "alternative models". Indeed, Brown and Hammer (2008) argue that most of the research in, for example, conceptual change has taken conceptions (such as "more bulbs – less current") as "units of knowledge". Furthermore, this view is widely held by the physics education community and ample research is still published about students' misconceptions. Contemporary research has however noted that while some of the learner's problems might be rooted to specific concepts and theories, there might be some more general features that play a part (Brown & Hammer, 2008; Perkins & Grotzer, 2005). One such feature seems to be students' knowledge of various principles underlying physics phenomena.

RELATIONAL KNOWLEDGE

Evidence from science education research

Grasping the underlying principles is important in, for example, treating DC circuit phenomena as a system (cf. Slotta, Chi, & Joram, 1995). That is, students need to learn the concepts and relations according to which the system operates – for example, Ohm's law. Indeed, some researchers have argued that many of students' difficulties are rooted in their limited awareness of various relational patterns in laws and models of physics (Perkins & Grotzer, 2005). Instead, students tend to use simple sequential (for example, A causes B which causes C and so forth) patterns instead of more complex patterns such as constraint-based interaction (Perkins & Grotzer, 2005). So as well as concept specific knowledge, students are lacking generic relational patterns and modelling styles.

Rather similarly, previous studies have examined concept differentiation and the role of relational knowledge in high school and university students' explanations of DC circuits. It seems that in the early stages learning relational, law-like knowledge drives the differentiation (Koponen & Huttunen, 2013; Koponen & Kokkonen, 2014). This means that introducing a causal relation, which connects electric current to voltage, defines each concept's role. Thus they are unambiguously seen as different concepts. In analysing university students' explanations, Kokkonen (2013) identified three generic relational patterns (see Figure 1) and used these to analyse students' explanations and the concept learning process. It seems that on this higher level, the key element in successful construction of the explanation models is the flexibility in using the different relational patterns (Kokkonen & Mäntylä, under review; see also, Kokkonen, 2013; Koponen & Huttunen, 2013)

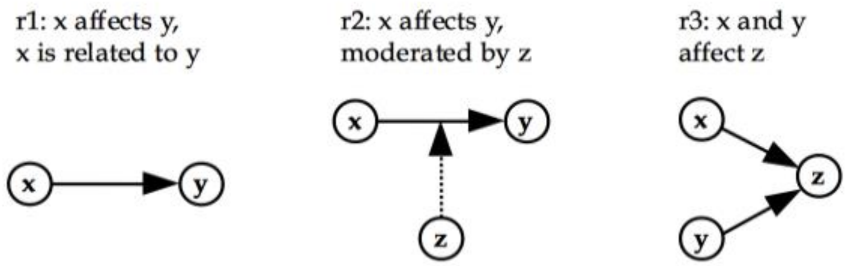


Figure 1. Diagrams of generic relational patterns appearing in students' explanations identified in Kokkonen & Mäntylä (under review; see also, Kokkonen 2013)

In sum, research on students' knowledge has indicated several hurdles on the path of learning scientific knowledge. In certain domains, one important issue seems to be the differentiation of closely related concepts. In the context of DC circuits one aspect of this problem is knowing how electric current and voltage relate to the actual circuits and components (roughly put, for example current divides in parallel connections while voltage stays the same). Furthermore, especially in science, educational research has begun to establish the complex relational knowledge as one of the stumbling blocks.

Relational Concepts

Further evidence for the centrality of relational knowledge comes from research on human cognition and concepts[4]. Broadly speaking, relations are a fundamental part of our understanding of the world. For example, even our understanding of such simple concept as *father* is defined by the relation father bears to his offspring (namely, begetting) (Gentner, 2005). Thus, *father*

[4] Concepts can be understood as (mental) knowledge structure about x, used in most high-level cognitive processes (e.g., inference, prediction etc.) concerning x (Machery, 2009).

is essentially a *relational concept*. If we consider a more complex case, such as *central force system,* it might be even more evident that relations from the basis for understanding. In the case of Earth and Moon, for example, we may say that Moon relates to Earth by the virtue of revolving around it. We may also construct a physics model of the situation, in which case the relations in question might be represented as mathematical functions (see, e.g., Gentner, 2005).

Relations and relational knowledge are important for example in categorization, analogies, explanation, concept learning, reasoning and problem solving (Halford, Wilson, & Phillips, 2010). Thus, learning of relational concepts is a fundamental question for the study of higher-level cognition. For example, analogies enable us to gain insight of unfamiliar phenomena by virtue of comparison to previously known examples. Famous examples include the water pipe analogy for electric circuits and the solar system - atom analogy. One mechanism through which analogies work is structural alignment: identifying the underlying relational pattern in the phenomena and matching it with the novel phenomena under study (Gentner, 2005). Crucial thing to notice is that the entities involved in analogical mapping need not to share resemblances – they are mapped by the virtue of their similar roles and relational structure.

Mental models, abundant in science education literature, exhibit many properties of relational knowledge (Halford et al., 2010). While there exist no rigorous definition for mental models, they are typically considered to contain structural and/or causal information about the system being modelled (Markman, 1999). Some describe them as "inter-related system of concepts" and structural analogues of the thing they represent (Chi, 2013). Hence, they serve as the vehicles for making inferences about the phenomena. Moreover, mental models enable us to predict about the system and reason about, for example, unexpected events.

Relational concepts in the context of DC circuits

We can also understand physics concepts in terms of relational concepts. To this end, a useful distinction is one between first and higher order relations. While the former concerns relations between objects, the latter links relations (Gentner, 1989; see also, Paatz, Ryder, Schwedes, & Scott, 2004). Following Paatz and others (2004) we may use this dichotomy to understand concepts related to DC circuits. We may view electric current and voltage as governed by first order relations, namely, Kirchhoff's laws. In addition, for simple DC circuits, current and voltage are connected via Ohm's law, a higher order relation (as it relates relational concepts). Note, that such formal definitions are not necessarily part of students' representation of the concepts. Instead, they may view electric current as something flowing *in* the circuit or *dividing* in junctions, and voltage as something being *between* the battery terminals. In these cases the concepts are nonetheless associated with essentially relational rules.

Consequently, concept differentiation can now be understood as learning the first order relational structures of electric current and voltage for example. That is, figuring out how current and voltage relate to different circuit elements or whether electric current is something that *comes from* the battery or something that is *between* battery's terminals[5]. Likewise, learning the relational structure (e.g., Ohm's law) of the DC circuit system means capturing the higher order relations governing the relevant concepts such as r2 in Figure 1.

In sum, relations and relational concepts form a fundamental part of our understanding of the world and higher cognitive capacities. Physics concepts, for example concepts related to DC circuits can be understood in terms of relational concepts and first and higher order relations. The first order relations correspond to the more concrete representations (i.e. perceptual features of the DC circuits, such as topology of the circuit). In contrast, higher order relations concern the more abstract concepts and relations between concepts. The implications for the mechanisms of concept learning will be discussed later.

METHOD

Participants

The participants were 11 (7 female) pre-service teachers participating on a physics teacher preparation course. Seven participants were majoring in physics, three in mathematics and one in statistics. All participants had experience about electric circuits from high school level and had studied the introductory physics courses at the university. The DC circuit tasks were part of the course intended to familiarize the students with working with real circuits. Data collection was done with participants consent.

Procedure

We asked the participants to explain the behaviour of simple DC circuits. The tasks consisted of three different sets of circuits: 1) different battery combinations and similar bulbs (cf. D. P. Smith & van Kampen, 2011), 2) different combinations of bulbs but similar batteries (cf. McDermott & Shaffer, 1992), and 3) dissimilar bulbs with similar batteries. Each set consisted of four circuits with ascending complexity designed to bring about different aspects of concepts related to DC circuits (cf. McDermott & Shaffer, 1992). The third

[5] Here, *is between,* for example, should be understood as a relation thus making voltage a relational concept.

set appears in Figure 2. Each set of circuit tasks was presented piecewise so that first, two circuits were presented (A-B, in Figure 2), then the other two one at a time (CD and EF). After completion of each set, students constructed the circuits. After the construction, we presented them with the principle supposed to be employed in the task. The students' task was as follows (note: the original task was in Finnish):

> The circuits shown below consist of similar bulbs and batteries. The battery's voltage is 4.5 V.
>
> a) Place the bulbs in order according to their relative brightness. If any of the bulbs are equally bright, state this in your answer. **Explain your answers.**
>
> b) Compare the voltages across the bulbs
>
> c) Compare the magnitude of the electric currents through each bulb

For the task, in which the bulbs were dissimilar (see Figure 2), the first sentence read:

> In the circuits below, bulbs marked with grey have a higher resistance than the white ones. The batteries are similar in each circuit.

The tasks were carried out in a quiet classroom in two 1.5 h sessions with half of the participants participating in each session. The students were handed the question sheet on which they also wrote their answers.

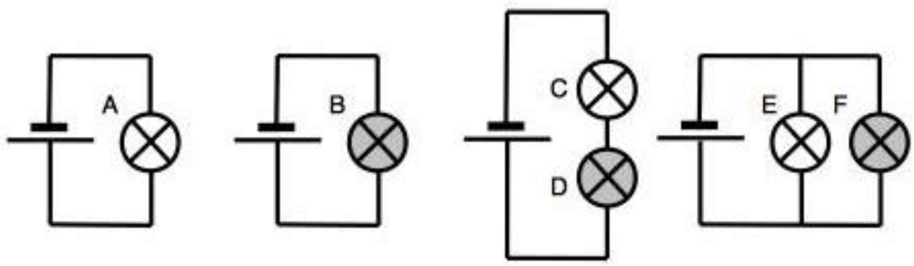


Figure 2. Circuits diagram used in the third set. The bulbs marked with grey have higher resistance than the white ones. Circuits were presented piecewise so that A and B were presented first and CD and EF after that one at a time.

Data analysis

We analysed the written answers by the means of content analysis (cf. Elo & Kyngäs, 2008). Based on the previous studies (Kokkonen & Mäntylä, under review; see also Kokkonen, 2013) we defined a coding scheme for the explanations and conducted a deductive analysis (Elo & Kyngäs, 2008). We first identified the concepts used in the explanation and coded the relations associated with the concepts. The relations were coded according to the generic schemes that appear in Figure 1. We also identified explanations using "rules of thumb" such as "bulbs are equally bright because they are connected in series". These were categorized as "simple" explanations (cf. Kokkonen, 2013). Moreover, the students' answers to questions about the voltages and current in the circuits were also checked in order to conclude whether the students' could differentiate between the concepts.

RESULTS

Overview of the answers

Across the problem sets 1, 2 and 3, students averaged 75%, 50%, 38% correct answers, respectively. The number of right answers varied from 1 to 17 out of 24 (39% correct answers on average). In total, three students out of 11 used relations (see Fig. 1) consistently; that is, they used it in all of the problems sets. Others relied on mostly voltage or current based explanations (i.e., they did not use relations in their explanations). Some simple explanations appeared as well. The frequencies of different explanations appear in Table 1.

Table 1. Frequencies of the different explanations in different sets of tasks (A-C). Terms r1,r2 and r3 denote different relations used in explaining (see Figure 1). S and c denote "simple" and "one concept" explanations, respectively.

task	A					B					C				
explanation	s	c	r1	r2	r3	s	c	r1	r2	r3	s	c	r1	r2	r3
freq.	1	16	2	5	0	4	12	7	2	1	3	15	9	6	0

Concepts and relational knowledge in the explanations

Simple explanations

Some students used simple explanations, which are more like descriptive "rules of thumb" than explanations. In themselves, the simple explanations are not generalizable to other contexts. In a typical simple explanation the brightnesses are explained by the virtue of the connection (parallel or series). As student S1 explains in the case of one bulb being connected in series with two bulbs in parallel:

> S1 (Task 1c): "F and G are equally bright *because they are connected in parallel.* You can think of F and G as one bulb so they burn as brightly as H *because of the series connection*."

Explanations with relation one concept

Explanations with a reference to one physics concept go beyond the descriptive rules of thumb but are still not very sophisticated. However, the explanatory power is still limited. As in the excerpt below, where S2 explains that the increased resistance results in bulbs in series being dimmer than a sole bulb (no other concepts are used).

> S2 (Task 2a): ”A is the brightest and B and C are equally bright but dimmer than A because 2 bulbs in series => twice the resistance.”

Likewise, S1 relies only on electric current when explaining the same situation:

> S1 (Task 2a): ”[A>B=C]... Because B and C are connected in series the electric current going through them has to light up two bulbs instead of one.”

While leading to correct answers, these explanations would most likely fail when parallel connections are introduced.

Explanations with relation r1

Relation r1 means that two concepts are used in the explanation so that the one causes the other or is related to it. In the excerpt below, S3 explains that the increased resistance causes the electric current to be smaller (and thus the bulbs are dimmer).

> S3 (Task 3a): ”A>B. There is a smaller electric current going through B because its resistance is bigger. “

While leading to a correct answer, this kind of explanation is bound to fail if bulbs with different resistances are connected in series, in which case one would need to consider the power consumed by the bulbs – that is, the brightness will depend on the multiplication of voltage and electric current.

Explanations with relation r2

Explanations with relation r2 entail using three concepts as in Ohm’s law, for example. These explanations are quite sophisticated as they might employ Ohm’s law but might nevertheless fail when dissimilar bulbs are introduced (as it would require introducing the Joule’s law and the concept of electric power). In the excerpt below S5 explains why B (a bulb with a bigger resistance) is brighter than A.

> S5 (Task 1a) ”The voltage of the bulbs is as big as in the batteries, because the bulb is the only component. According to Ohm’s law the electric current through bulb B is bigger than through bulb A, because the resistance is the same -> B is brighter. “

Explanations with relation r3

Like relation r2, relation r3 entails using three concepts. With relation r3, however, two concepts are both related to a third one but not necessarily to each other. In the excerpt below, S6 compares bulbs in series (B and C) with bulbs in parallel (D and E) and notes that voltage divides B and C but current stays the same and vice-versa for D and E – thus B, C, D and E are equally bright (a false answer).

> S6 (Task 2b): ”P=UI. In the second circuit the voltage is different over B and C and in the third the current is different -> P is the same.“

While S6 acknowledges that, both, voltage and electric current need to be considered, he/she seems to hold the false belief that batteries provide constant current.

DISCUSSION

As noted earlier, most students relied on rather unsophisticated explanation models – that is, their explanations had very a simple causal structure. While the simple models (i.e., “rules of thumb”) may in themselves be correct descriptions of the situations, they are superficial in that they are not applicable in other contexts. The explanations with one concept or relation r1, for example, are somewhat more elaborated but nonetheless have limited applicability as noted in the previous section. For example, in order to correctly explain the brightnesses of the bulbs in Figure 2, one must use Ohm’s law together with Joule’s law. Hence, for many students, the learning remains incomplete and requires the learning of relational knowledge (models and laws). It should be noted, however, that even with elaborated relational knowledge, the explanations might fail because student holds a false belief for example (see the last excerpt in the previous section). As for these results, they align well with our previous results thus supporting the conclusion they were not interview-induced artefacts (see Koponen & Huttunen, 2013; Kokkonen & Mäntylä, under review; Kokkonen, 2013).

Studies with elementary and middle-school students have noted that students are predisposed towards “direct” or “linear” causality and have difficulty learning, for example, emergent and constraint-based patterns (Chi et al., 2012; Perkins & Grotzer, 2005). Our results show similar findings, which imply that the difficulties persist even at the university level. These results point towards the direction that the relational nature of physics concepts causes learners great difficulties. Consequently, students’ ability to apply and modify this knowledge is vital to the construction of the correct explanation models.

As relational knowledge is central to human cognition on one hand, and to physics knowledge on the other, we see it as the major stumbling block in learning and understanding physics. This way the central learning processes are those related to revision of the relational structure. This “theory revision” could happen either through refinement (stripping down relations) or elaboration (adding relations to the present structure) (Halford et al., 2010). In a previous study concerning DC circuits, three distinctive processes elaboration, refinement and switch were suggested, which align with those proposed by Halford and others (Kokkonen, 2013; Kokkonen & Mäntylä, under review). Furthermore, as suggested by Corral and Jones (2014) the learning process is affected by the relational structure. The number of relations as well as the type of relational pattern (such as those in Figure 1) affects the difficulty of learning. This may be down to, for example, limitations in working memory, too complex concepts are bound to decomposition and chunking (Halford et al., 2010).

Ideas about revision of the conceptual structure are, of course, not new in science education. Clement and Steinberg (2002) suggested a learning process called "GEM cycle", which can involve successive intermediate models where the number of concepts increases or their relations change. These accounts also share similarities to learning path ideas, where identifying the different steps from students' initial knowledge to the targeted learning goal is essential (Duschl, Maeng, & Sezen, 2011). Ideas presented above have potential to serve as common pivot point to further research and clarify the relation of different accounts of concept learning by grounding them firmly on the psychology of learning.

Acknowledgements: We thank the organizers and participants of the "Writing to get published in STEM education research" course held at the University of Copenhagen.

REFERENCES

Brown, D. E., & Hammer, D. (2008). Conceptual change in physics. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (pp. 127-154). New York, NY: Routledge.

Chi, M. T. (2013). Two kinds and four sub-types of misconceived knowledge, ways to change it and the learning outcomes. In S. Vosniadou (Ed.), *International handbook of research on conceptual change* (2nd ed., pp. 49-70). London: Routledge.

Corral, D., & Jones, M. (2014). The effects of relational structure on analogical learning. *Cognition, 132*(3), 280-300.

Duschl, R., Maeng, S., & Sezen, A. (2011). Learning progressions and teaching sequences: A review and analysis. *Studies in Science Education, 47*(2), 123-182.

Elo, S., & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing, 62*(1), 107-115.

Gentner, D. (1989). The mechanisms of analogical learning. In S. Vosniadou, & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). London: Cambridge University Press.

Gentner, D. (2005). The development of relational category knowledge. In L. Gershgoff-Stowe, & D. Rakison (Eds.), *Building object categories in developmental time* (pp. 245-275). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Halford, G. S., Wilson, W. H., & Phillips, S. (2010). Relational knowledge: The foundation of higher cognition. *Trends in Cognitive Sciences, 14*(11), 497-505.

Kokkonen, T. (2013). Käsitteet ja käsitteellinen muutos tasavirtapiirien kontekstissa. (Master's thesis, University of Helsinki).

Koponen, I. T., & Huttunen, L. (2013). Concept development in learning physics: The case of electric current and voltage revisited. *Science & Education, 22*(9), 2227-2254.

Koponen, I. T., & Kokkonen, T. (2014). A systemic view of the learning and differentiation of scientific concepts: The case of electric current and voltage revisited. *Frontline Learning Research, 2*(3), 140-166.

Lee, Y., & Law, N. (2001). Explorations in promoting conceptual change in electrical concepts via ontological category shift. *International Journal of Science Education, 23*(2), 111-149.

Machery, E. (2009). *Doing Without Concepts*. New York, NY: Oxford University Press.

Markman, A. B. (1999). *Knowledge representation*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McDermott, L. C., & Shaffer, P. S. (1992). Research as a guide for curriculum development: An example from introductory electricity. part I: Investigation of student understanding. *American Journal of Physics, 60*, 994-994.

Paatz, R., Ryder, J., Schwedes, H., & Scott, P. (2004). A case study analysing the process of analogy-based learning in a teaching unit about simple electric circuits. *International Journal of Science Education, 26*(9), 1065-1081.

Perkins, D. N., & Grotzer, T. A. (2005). Dimensions of causal understanding: The role of complex causal models in students' understanding of science. *Studies in Science Education*, *41*(1), 117-165.

Reiner, M., Slotta, J. D., Chi, M. T., & Resnick, L. B. (2000). Naive physics reasoning: A commitment to substance-based conceptions. *Cognition and Instruction, 18*(1), 1-34.

Rusanen, A. (2014). Towards to an explanation for conceptual change: A mechanistic alternative. *Science & Education, 23*(7), 1413-1425.

Slotta, J. D., Chi, M. T., & Joram, E. (1995). Assessing students' misclassifications of physics concepts: An ontological basis for conceptual change. *Cognition and Instruction, 13*(3), 373-400.

Smith, C., Carey, S., & Wiser, M. (1985). On differentiation: A case study of the development of the concepts of size, weight, and density. *Cognition, 21*(3), 177-237.

Smith, D. P., & van Kampen, P. (2011). Teaching electric circuits with multiple batteries: A qualitative approach. *Physical Review Special Topics-Physics Education Research, 7*(2), 020115.

Steinberg, M.S., & Clement, J.J. (2002). Step-Wise Evolution of Mental Models of Electric Circuits: A ”Learning Aloud” Case Study. *Journal of the Learning Sciences, 11(2), 389-452.*

Tarciso Borges, A., & Gilbert, J. K. (1999). Mental models of electricity. *International Journal of Science Education, 21*(1), 95-117.

LUOKANOPETTAJAOPISKELIJOIDEN GEOMETRISISTA MÄÄRITELMISTÄ

Tomi Kärki

Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, Rauman yksikkö

Tässä tutkimuksessa analysoidaan luokanopettajaksi opiskelevien kirjoittamia taso- ja avaruusgeometrian käsitteiden määritelmiä ja pohditaan niiden yhteyttä opiskelijoiden geometriseen ajatteluun. Luokanopettajaopiskelijoiden monialaisten opintojen matematiikan opintojakson määritelmätestin vastaukset (N=70) luokiteltiin aineistolähtöisen sisällönanalyysin pohjalta. Määritelmät vaihtelivat triviaaleista kuvailuista eksakteihin matemaattisiin määritelmiin. Eroa formaaleihin määritelmiin esiintyi niin terminologian käytössä kuin yläkäsitteiden ja tarkentavien ehtojen muodostamisessa. Määritelmistä löydettiin samankaltaisuutta aiemmissa tutkimuksissa todettuihin peruskoulun oppilaiden ja opettajaksi opiskelevien muodostamiin määritelmiin.

JOHDANTO

Suomessa 2010-luvulla toteutettujen koulusaavutustutkimusten valossa suomalaisten oppilaiden geometrian osaaminen on algebran ohella muita sisältöalueita heikompaa. Vuoden 2012 PISA-tutkimuksessa (Programme for International Student Assessment) *tila ja muoto* oli suomalaisten selvästi heikoimmin osaama matematiikan osa-alue. Siinä heikkojen suoritusten osuus oli muita sisältöalueita suurempi ja erinomaisten suorittajien osuus pienin (Kupari, Välijärvi, Andersson, Arffman, Nissinen, Puhakka, & Vettanranta, 2013). Samoin TIMSS 2011 -tutkimuksen (Trends in International Mathematics and Science Study) mukaan geometria ja algebra olivat suomalaisoppilaiden heikoimmat alueet, missä tehtävien osaaminen oli lähellä kansainvälistä keskiarvoa (Kupari, Vettenranta, & Nissinen, 2012).

Kansainvälisestikin tarkasteltuna oppilaiden geometrisen osaamisen on todettu olevan alhaisella tasolla ja syyksi tilanteeseen on esitetty geometrian kouluopetuksessa saaman heikon aseman lisäksi sekä geometrian didaktisten käytänteiden uudistumattomuutta että opettajien oman geometrisen tietämyksen puutteellisuutta (Steele, 2013). Tulevien opettajien käsitys geometriasta on Browningin ja kollegoiden (2014) metatutkimuksessa todettu varsin rajalliseksi. He näkevät opettajien matemaattisen sisältötiedon kriittisenä tekijänä oppilaiden geometrisen ymmärryksen kehittymisessä ja painottavat opettajankouluttajien vastuuta tulevien opettajien tietoperustan luomisessa.

Geometrian asema osana koulumatematiikkaa on Suomessa säilynyt opetussuunnitelmien perusteella melko samanlaisena 2000-luvulla. Ilman kattavaa tutkimusta on vaikea arvioida, miten luokkien didaktiset käytännöt ovat tuona aikana muuttuneet, mutta ainakin tietotekniikka on avannut monia mahdollisuuksia opettaa geometriaa uudella tavalla (Battista, 2002; Jackiw, 2010; Hall, 2013; Joglar Prieto, Sordo Juanena, & Star, 2014). Syitä suomalaisten heikkoon geometrian osaamiseen tulisikin tutkia mm. koulujen geometrian opetusta ja työtapoja sekä oppimateriaalien laatua analysoimalla. Tämän tutkimuksen tutkimuskohteena on alakoulun opettajien geometrinen taitotieto. Tutkimuksessa rajoitutaan tarkastelemaan luokanopettaja-opiskelijoiden kirjoittamia geometrisia määritelmiä ja pohditaan niiden antamia viitteitä geometrisen käsitetiedon tasosta.

GEOMETRISEN AJATTELUN KEHITTYMINEN

Matemaattinen tietämys voidaan jakaa dikotomisesti konseptuaaliseen eli käsitetietoon ja proseduraaliseen eli menetelmätietoon (Hiebert & Lefevre, 1986). Proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon luonnetta ja roolia matematiikan oppimisessa on tutkittu paljon ja näiden tietotyyppien yhteydestä matemaattisen tiedon laatuun on esitetty erilaisia näkemyksiä. Tutkijoiden erilaisista tietotyyppien määrittelyistä huolimatta mielekkään matemaattisen tiedon nähdään koostuvan monimutkaisesti yhteenkietoutuneesta vastavuoroisessa suhteessa kehittyvästä käsite- ja menetelmätiedosta. (Baroody, Feil, & Johnson, 2007; Star & Stylianides, 2013; Rittle-Johnson & Schneider, 2015.) Geometrisen tiedon osalta Silfverberg kuvaa oppilaan käsitetiedon koostuvan esimerkiksi siitä, mitä oppilas tarkoittaa suorakulmiolla, suunnikkaalla tai suorakulmaisella särmiöllä, minkälaisia ominaisuuksia näillä käsitteillä hänen mielestään on ja miten käsitteet linkittyvät toisiinsa. Geometrinen menetelmätieto taas koostuu geometristen objektien merkintätapojen lisäksi algoritmisista toimintasäännöistä kuten pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskutavoista sekä kuvioiden ja kappaleiden piirtämiseen liittyvistä sopimuksista. (Silfverberg, 1999.)

Hyödyllisen viitekehyksen geometrisen ajattelun kehittymisen tarkastelulle tarjoaa ns. van Hielen teoria (Browning ym., 2014). Teoria perustuu hollantilaisten Pierre van Hielen ja Dina van Hiele-Geldofin 1950-luvulla alkaneisiin tutkimuksiin (Fuys, Geddes, & Tischler, 1984), ja sen validoinnista ja merkityksestä geometrian opetukselle on tehty useita tutkimuksia (Ma, 2015). Teoria sisältää hypoteesin oppilaan geometrisen ajattelun kehittymisestä viiden tason kautta. Kehitystasojen yleissisältö on laajasti hyväksytty, mutta etenkin tasojen tiukasta erillisyydestä ja hierarkiasta on esitetty väljempiä tulkintoja. Oppilaiden geometrisessa ajattelussa näyttää tapahtuvan edistystä usean tason kohdalla samanaikaisesti, kuitenkin alemman van Hielen tason piirteiden ollessa pääsääntöisesti edellä korkeampien tasojen piirteiden kehitystä. (Silfverberg, 1999; Unal, Jakubowski, & Corey, 2009.) Erityisesti on pohdittu käsitteiden välisen luokkainkluusion ymmärtämisen ja määrittelytaidon kehittymisen sijoittumista tasojen kuvauksiin (mm. Silfverberg, 1999; Silfverberg & Matsuo, 2008; de Villiers, 2010). Seuraava van Hielen tasojen ominaisuuksien lyhyt kuvailu perustuu alkuperäislähteisiin (Fuys ym., 1984) sekä Silfverbergin (1999) ja Van de Wallen, Karpin ja Bay-Williamsin (2009) esittämään tulkintaan:

Visualisoinnin tasolla (vH1) ajattelu kohdistuu yksittäisiin kuvioihin, joiden tunnistus ja luokittelu perustuu visuaalisen ulkomuodon samankaltaisuuteen.

Ominaisuuksien analysoinnin tasolla (vH2) kuviot nähdään ominaisuuksiensa kantajina. Kuvioluokkaan kuuluminen perustuu ominaisuuksien analysointiin eikä pelkästään visuaaliseen samankaltaisuuteen, mutta ominaisuuksien keskinäisiin riippuvuussuhteisiin ei kiinnitetä huomiota. Kuvioita määritellessään tälle tasolle kuuluvat oppilaat todennäköisesti luettelevat kaikki kuviolle tuntemansa ominaisuudet.

Ominaisuuksien järjestämisen eli epäformaalin päättelyn tasolla (vH3) ajattelun kohteena ovat kuvioiden ominaisuudet, jotka järjestäytyvät loogisiksi rakenteiksi. Oppilas ymmärtää, että jotkin ominaisuudet ovat seurausta toisista ominaisuuksista, ja hän osaa tehdä lyhyitä deduktiivisia päätelmiä. Kuvio tunnistetaan geometrisen käsitteen alaan kuuluvaksi käsitteen määritelmän perusteella. Määritelmiä osataan muotoilla ilmaisten kuvioiden riittävät ja välttämättömät ominaisuudet ja näiden ominaisuuksien avulla osataan muodostaa geometrisista käsitteistä käsitehierarkioita.

Formaalin päättelyn tasolla (vH4) ymmärretään deduktiivisen päättelyn idea ja hallitaan deduktiivisen geometrian ajattelutapa.

Aksioomasysteemin ymmärtämisen tasolla (vH5) pystytään hallitsemaan ja vertailemaan eri geometrioita aksiomaattisina järjestelminä.

MÄÄRITELMÄT OSANA GEOMETRISTA KÄSITETIETOA

Silfverbergin (1999) tutkimuksen mukaan määrittelytaidolla ja van Hielen tasoilla on tilastollisesti erittäin merkitsevä yhteys. Silfverberg havaitsi, että ylemmillä tasoilla olevat oppilaat kykenivät alempien tasojen oppilaita paremmin määrittelemään geometrisia kuvioita ja tulkitsemaan käsitteiden välisiä suhteita matematiikan standarditulkinnan mukaisesti. Tietorakenteiden eheytyminen näkyi erityisesti kolmannelle tasolle siirryttäessä, mutta tason vH3 yleisten tulkintojen vastaisesti ei selvää muutosta käsitteiden välisten suhteiden ja kuvioiden määrittelemisen osaamisessa voitu havaita.

Fischbein (1993) kutsuu geometrisia objekteja *figuraalisiksi käsitteiksi* (figural concepts) korostaakseen niiden kaksoisluonnetta. Geometristen kuvioiden ja kappaleiden luonteessa on samanaikaisesti läsnä sekä objektin konseptuaalinen eli käsitteellinen komponentti että figuraalinen eli kuvallinen komponentti. Geometrinen objekti on abstrakti idea, jonkin aksioomasysteemin mukaiseen määritelmään perustuva olio, jota ei ole olemassa reaalimaailmassa eikä siihen voida liittää todellisuudessa aistittavia ominaisuuksia. Geometristen kuvioiden piirrokset ja kappaleiden konkreettiset mallit ovat vain matemaattisten käsitteiden aineellisia malleja. Toisaalta geometriseen objektiin liittyy aina visuaalinen kuva, mentaalinen representaatio tilasta tai muodosta, joka on erottamattomasti läsnä geometrisessä ajattelussa ja joka Fischbeinin mukaan tarvitaan geometrian tieteenalan luovaan kehittymisprosessiin. Figuraalinen käsite -termi kuvastaa loogisen ja figuraalisen näkökulman ideaalista mentaalista yhteensulautumista, joka Fischbeinin mukaan ei tapahdu luonnollisesti itsestään. Monesti oppilaiden ajattelussa kuvallinen ja käsitteellinen komponentti ovat ristiriidassa keskenään tai kuvallinen komponentti hallitsee geometrista päättelyä. Oppilaiden tulisikin olla tietoisia määritelmistä ja niiden roolista geometrisessä ajattelussa. Geometriset tehtävät tulisi suorittaa kuvan antaman informaation sijaan objektien määritelmiin perustuen. (Fischbein 1993.) Malatyn (1994) antaman esimerkin mukaan ideaalisen geometrisen käsitteen ja sen kuvallisen esityksen eroa voidaan opettaa pienillekin koululaisille. Fischbeinin (1999) näkemyksen mukaan yksi geometrian didaktiikan päätehtävistä on luoda sellaisia oppimistilanteita, joissa systemaattisesti vaaditaan käsitteellisen ja kuvallisen komponentin yhteensovittamista. Silfverberg (1999) näkee tässä yhteensovittamisessa keskeiseksi tekijäksi *visuaalisen varioinnin* kyvyn eli oppilaan kyvyn mielikuvatasolla tuottaa geometrisista käsitteistä tarkoitushakuisesti erityyppisiä esimerkkitapauksia.

Tietämys matemaattisista määritelmistä ja käsitys määrittelemisestä osana matemaattista toimintaa vaikuttaa opettajan opetukseen, didaktisiin päätöksiin ja tapaan, jolla he käsittelevät matemaattista sisältöä (Leikin & Zazkis, 2010). Opetukseen vaikuttaa siis opettajan kokonaisymmärrys käsitteestä eli *käsitekuva*. Tallin ja Vinnerin (1981) mukaan käsitekuvalla (concept image) tarkoitetaan sitä käsitteeseen liittyvää kognitiivisen järjestelmän täyttä kokonaisuutta, joka sisältää kaikki mentaaliset kuvat, käsitteeseen liitetyt ominaisuudet ja prosessit. Käsitekuva rakentuu ja muuttuu erilaisten kokemusten ja ärsykkeiden myötä. Se voi sisältää ristiriitaisia komponentteja ja siitä voi eri tilanteissa aktivoitua erilaisia osia. Henkilökohtainen käsitteen määritelmä (personal concept definition) tarkoittaa sanamuotoa, jota yksilö käyttää oman aktivoidun käsitekuvansa selittämiseen. Formaali käsitteen määritelmä (formal concept definition) on sanallinen esitysmuoto, joka on matemaattisen yhteisön laajalti hyväksymä. (Tall & Vinner, 1981.)

Leikin ja Zazkis (2010) esittivät Winicki-Landmanin ja Leikinin artikkeliin (2000) perustuen seuraavat tunnettujen matemaatikkojen hyväksymät periaatteet formaalille matemaattiselle määritelmälle: 1) Määritelmä antaa nimen uudelle käsitteelle ja nimi esiintyy määritelmässä vain kerran. 2) Määritelmä esittää käsitteelle välttämättömät ja riittävät ehdot. 3) Uuden käsitteen määrittelemiseksi voidaan käyttää vain aiemmin määriteltyjä käsitteitä tai ns. määrittelemättömiä peruskäsitteitä. 4) Määritelmässä esitettyjen ehtojen joukko pyritään muodostamaa usein minimaaliseksi eli ei esitetä ehtoja, jotka loogisesti seuraavat muista ehdoista. 5) Määritelmäksi voidaan valita mikä tahansa ekvivalenteista muotoiluista. Matematiikan opetuksessa tulee huomioida määritelmän matemaattisen oikeellisuuden lisäksi sen didaktinen soveltuvuus (Winicky-Landman & Leikin, 2000). Konstruktivistiseen näkemykseen pohjautuen määritelmän tulee perustua oppilaan aiemmin tuntemiin käsitteisiin ja sen tulee ottaa huomioon oppilaan senhetkinen kehitystaso. Käytetyn määritelmän tulisi mahdollisimman hyvin sopia yhteen oppijan intuition kanssa ja myös esteettiset näkökohdat, kuten ilmaisun selkeys ja eleganttius, tulisi ottaa huomioon.

Opettajien ja opettajaksi opiskelevien kyky ymmärtää geometrisia käsitteitä, muodostaa määritelmiä sekä kyky ymmärtää määritelmän merkitys matematiikassa ja määritteleminen matemaattisena prosessina on useissa tutkimuksissa todettu puutteelliseksi (mm. Linchevsky, Vinner & Karsenty, 1992; Cunningham & Roberts, 2010; Leikin & Zazkis, 2010; Duatepe-Paksu, İymen & Pakmak, 2012; Marchis, 2012; Silfverberg & Joutsenlahti, 2014). Marchis (2012) löysi opettajaksi opiskelevien kirjoittamista määritelmistä monia edellä mainituista formaalin matemaattisen määritelmän periaatteista poikkeavia piirteitä: 1) Opiskelijan kirjoittama määritelmä saattoi olla käsitteelle täysin väärä esimerkiksi siten, että ylä- ja alakäsitteet olivat vaihtaneet paikkaa. 2) Määritelmää ei esitetty määritelmän muodossa vaan listana määritelmään liittyviä ominaisuuksia. 3) Määritelmä ei sisältänyt välttämättömiä ja riittäviä ehtoja. 4) Määritelmä ei ollut minimaalinen. Vastaavankaltaisesti Silfverberg ja Matsuo (2008) luokittelivat peruskoulun oppilaiden antamat geometriset määritelmät naivien kuvausten lisäksi ehtojen oikeellisuuden, riittävyyden, minimaalisuuden ja oikean yläkäsitteen käyttämisen mukaan.

TUTKIMUSMENETELMÄ

Tämän tutkimuksen kohteena ovat luokanopettajaksi opiskelevien kirjoittamat geometristen käsitteiden määritelmät peruskoulussa opetettavien aineiden ja aihekokonaisuuksien monialaisten opintojen matematiikan opintojakson määritelmätestissä. Alkeisgeometrian määritelmät oli esitetty opintojakson monisteessa kolmeen taulukkoon jaoteltuna (geometriset peruskäsitteet 13 kpl, tasokuviot 22 kpl, avaruuskappaleet 12 kpl). Määritelmiä oli käsitelty opintojakson yhdellä luennolla sekä kahdella pienryhmäkerralla sekä tehtävissä, joihin kuului mm. käsitehierarkioiden piirtämistä puumallia käyttäen.

Määritelmätesti kesti noin 15–20 minuuttia ja sen aikana kukin opiskelija kirjoitti määritelmät kahdeksalle geometriselle käsitteelle. Määritelmät kysyttiin yksi kerrallaan kirjoittamalla ko. käsitteen nimi taululle. Opiskelijalla oli oikeus testin aikana palata aiemmin kirjoittamiinsa määritelmiin. Kysytyt käsitteet olivat kysymisjärjestyksessä *jana, kulma, monikulmio, suunnikas, suorakulmio, pallo, monitahokas* ja *kuutio*. Näiden käsitteiden luentomonisteessa esiintyneet määritelmät on esitetty Taulukossa 1. Testin jälkeen opiskelijoiden ehdottamista määritelmistä keskusteltiin ja he saivat pisteyttää toistensa vastauksia. Testiin osallistui yhteensä 70 opiskelijaa.

Taulukko 1. Geometristen objektien määritelmät luentomonisteessa

objektin nimi	määritelmä
jana	suoran osa, jolla on sekä alku- että loppupiste
kulma	kahden samasta pisteestä lähtevän puolisuoran väliin jäävä tason osa
monikulmio	suljetun itseään leikkaamattoman murtoviivan rajaama tason osa
suunnikas	nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat (pareittain) yhdensuuntaiset
suorakulmio	nelikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria
pallo	avaruuskappale, jonka rajoittava pinta muodostuu niistä kolmiulotteisen avaruuden pisteistä, jotka ovat yhtä etäällä annetusta keskipisteestä
monitahokas	avaruuskappale, joka on yksinomaan monikulmioiden rajoittama
kuutio	suorakulmainen särmiö, jonka tahkot ovat yhteneviä neliöitä

Tutkimusta varten opiskelijoiden vastaukset kirjattiin sähköiseen taulukkoon ja anonymisoitiin. Määritelmiä kirjattiin yhteensä 543. Tyhjiä vastauksia löytyi 3 kulman, 2 monikulmion, 2 suunnikkaan, 8 monitahokkaan ja 2 kuution kohdalla. Saadusta aineistosta etsittiin sisällönanalyysin keinoin vastausta tutkimuskysymykseen: *Millaisia määritelmiä luokanopettajaksi opiskelevat antavat taso- ja avaruusgeometrian käsitteille?*

TUTKIMUSTULOKSET

Aineistolähtöisen sisällönanalyysin mukaisesti kunkin geometrisen objektin erilaiset määritelmät ryhmiteltiin ja yhdistettiin luokiksi, joita kaikilla muilla kappaleille kertyi 7-16, mutta kuution kohdalla analyysissä syntyi aluksi jopa 29 luokkaa, koska riittämättömiä ehtoja tunnistettiin 14 erilaista tyyppiä. Aineiston abstrahoinnissa päädyttiin luokkia yhdistelemällä lopulta kuvaamaan aineistossa esiintyviä formaaleista määritelmistä poikkeavia määritelmätyyppejä yhdeksän kategorian avulla: **Y** yläkäsitteeseen liittyvät puutteet, **T** terminologiset virheet, **RE** riittämättömät ehdot, **TE** liian tiukat ehdot, **YL** ylimääräiset tiedot, listamääritelmät, **O** objektin osien luettelu, **N** naiivi kuvailu, **V** virheellinen tulkinta, **A** absurdi määritelmä. Vaikka tutkimuksen tarkoituksena ei ollut kvantitatiivisesti määrittää opiskelijoiden määrittelytaitoa, voidaan kuitenkin todeta, että sellaisia minimaalisia tai ei-minimaalisia määritelmiä, jotka liittivät käsitteen alaan kuuluvaksi tarkalleen käsitteen standarditulkintojen mukaiset tapaukset, hyväksyttiin noin 37 prosenttia. Tällaisia määritelmiä annettiin suorakulmiolle 50, suunnikkaalle 35, pallolle 32, janalle ja kuutiolle 24, kulmalle 16, monikulmiolle 10 ja monitahokkaalle 10.

Janan kohdalla terminologiset ongelmat (**T)** johtuivat yleisesti termin *suora* käyttämisestä kuvaamaan äärellisen mittaista suoraa viivaa. Yläkäsitteen puuttuminen (**Y**) näkyi esimerkiksi ilmaisuna ”Janalla on alku ja loppupiste”. Tyypillinen riittämätön ehto (**RE**) oli viivan suoruusominaisuuden puuttuminen käsitteen määritelmästä. Yksi vastaaja oli tulkinnut käsitteen selvästi väärin (**V**) määritellessään janan ”päättymättömäksi suoraksi linjaksi”.

Kulman kohdalla määritelmissä (**RE**) viitattiin puolisuorien väliseen alueeseen mainitsematta, että puolisuorilla on yhteinen alkupiste. Terminologisesti (**T**) ongelmallista oli, että puolisuorien väliin jäävän alueen tai tason osan sijaan puhuttiin koko tasosta ja puolisuorat oli joissain määritelmissä korvattu murtoviivalla. Opiskelijoiden määritelmissä havaittiin yhdenmukaisesti Silfverbergin ja Joutsenlahden (2014) tutkimuksen kanssa epästandardi tulkinta (**V**) siitä, että kulmaan kuuluu ainoastaan kulman kärkipiste ja sen lähiympäristö. Tällainen ilmaus oli esimerkiksi ”se kohta, jossa kaksi puolisuoran pistettä kohtaa”. Absurdiksi muotoiluksi luokiteltiin mm. ”kahden kohtisuoraan leikkaavan suoran muodostava kohta, joka on alle 90°”, jossa myös kohtisuoruuden ja kulman asteluvun yhteys jäi epämääräiseksi.

Monikulmion määritelmissä oli yleistä mainita, minkä nimisiä osia se sisältää (**O**). Riittämättömien ehtojen (**RE**) kategoriassa yleisin määritelmä oli sellainen, jossa murtoviivaa ei mainittu itseään leikkaamattomaksi. Muutama jätti mainitsematta murtoviivan suljetuksi. Terminologisesti (**T**) käytettiin jälleen tason osasta nimitystä *taso*, murtoviivan sijaan kirjoitettiin murtoviivoista tai suorista ja tasokuvion sijaan kappaleesta.

> P49: vähintään kolmen murtoviivan muodostama kuvio
>
> P68: suljettu itseään leikkaamaton muodostelma suorista, kuviossa on löydettävissä monta kulmaa
>
> P61: yhtenäinen kappale, joka muodostuu yhtä monesta sivusta ja sivujen rajaamista kulmista.

Myös suunnikkaan kohdalla tasokuviota nimitettiin kappaleeksi ja yhtä pitkiä sivuja yhdenmuotoisiksi (**T**). Kategoriaan **RE** katsottiin kuuluvaksi mm. ne määritelmät, joissa yläkäsitteenä oli käytetty monikulmiota, mutta ehdoissa ei rajattu käsitettä nelikulmioihin. Osassa määritelmistä (**Y**) yläkäsite puuttui kokonaan. Kategoriaan **YL** luokiteltiin suunnikkaalle tyypilliset mutta ei minimaaliset määritelmät, joissa mainitaan kaksi tai kolme seuraavista ekvivalenteista ominaisuuksista: vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Kahdeksan opiskelijan määritelmä vastasi jotakin muuta käsitettä (**V**), esimerkiksi puolisuunnikasta tai suuntaissärmiötä. Myös suorakulmiota kysyttäessä kuuden opiskelijan määritelmä sopi johonkin toiseen geometriseen objektiin, esimerkiksi suunnikkaaseen. Suorakulmion määritelmästä löytyi terminologisten puutteiden ja yläkäsitteen puuttumisen lisäksi määritelmiä (**YL**), joissa oli ylimääräisiä ehtoja:

> P42: Suorakulmio on monikulmio, jonka kaikki kulmat ovat suoria sekä suunnikas, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä.

Pallon määritelmässä haastava termi (**T**) oli pinta, jonka sijaan käytettiin tasogeometriaan kuuluvia sanoja *kehä*, *kaari*, *piiri* tai jopa *taso*. Yksi vastaaja määritteli pallon sijaan ympyrän (**V**). Absurdeja (**A**) tai naiiveja kuvauksia (**N**) löytyi muutamia.

> P12: Pallo on avaruuskappale, joka on kolmessa tasossa joiden jokaisesta kaaren pisteestä on yhtä pitkä matka keskipisteeseen.

> P70: Pallo on avaruuskappale jolla on tilavuus. Siinä ei ole yhtään kulmaa ja se on muodoltaan symmetrinen ja pyöreä.

Monitahokkaan yläkäsitteeksi (**Y**) oli virheellisesti valittu mm. monikulmio, lieriö tai särmiö. Määritelmä saattoi olla vain nimestä johdettu ilmaisu (**N**) kuten ”Monitahokas koostuu monista tahkoista” tai käsitteen osien (tahko, särmä, kärki) luettelo (**O**). Tässä kaksi opiskelijaa oli antanut liian tiukat ehdot vaatimalla tahkojen yhtenevyyttä. Monitahokkaalle löytyi muita käsitteitä enemmän sellaisia määrittelyjä, joiden voitiin katsoa kuvaavan ennemmin jotakin muuta käsitettä, esimerkiksi särmiötä.

Opiskelijoille varmasti hyvin tutun käsitteen, kuution, kohdalla korostui riittämättömät ehdot -kategorian (**RE**) yleisyys. Useimpiin tällaisiin määritelmiin sopi vastaesimerkiksi pirunnyrkkiä muistuttava seitsemästä samanlaisesta kuutiosta koostuva rakennelma tai suuntaissärmiö tai suorakulmainen särmiö. Terminologisesti sekoittuivat jälleen taso- ja avaruusgeometrian termit kuten *sivu* ja *särmä*.

> P9: monitahokas, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja tahot samankokoiset.

> P13: avaruuskappale, joka muodostuu tasasivuisista nelikulmioista.

> P27: kuudesta nelikulmiosta koostuva kappale, jonka kaikki kulmat ovat suoria.

POHDINTA

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin luokanopettajiksi opiskelevien geometrisille objekteille antamia määritelmiä. On syytä mainita, että tarkoituksena ei ollut mitata opiskelijoiden geometrisen käsitetiedon tasoa, eikä se tällä tutkimusasetelmalla olisi ollut edes mahdollista. Koska opiskelijoita kehotettiin opiskelemaan määritelmiä ja niitä oli käsitelty kurssin aikana, on luultavaa, että osa oppilaiden tuottamista formaaleiksi luokitelluista määritelmistä oli ulkoa opittuja. Tutkimuksen luotettavuutta tarkasteltaessa onkin huomattava, että käytetyllä tutkimusmenetelmällä saatiin tietoa opiskelijoiden senhetkisistä henkilökohtaisista käsitteiden määritelmistä, joihin määritelmätestiin valmistautumisella on ollut oma vaikutuksensa. Aineistonkeruuta voidaan pitää kattavana, sillä määritelmätestiin osallistui suurin osa yksikön monialaisten opintojen toisen vuosikurssin opiskelijoista, testissä kysyttiin useiden erilaisten geometristen objektien määritelmiä ja analysointiyksiköitä kertyi runsaasti. Analysoinnissa määritelmien kirjaaminen sähköiseen taulukkoon mahdollisti määritelmien ominaisuuksien sujuvan vertailun ja lisäsi näin tutkimuksen luotettavuutta. Tutkijatriangulaation puuttuminen heikentää luotettavuutta, mutta raportoinnissa esimerkkeinä käytetyt opiskelijoiden vastaukset antavat lukijalle mahdollisuuden tutkijan tulkintojen oikeellisuuden arviointiin. Tutkimuksen toteutuksessa tulisi suhtautua kriittisesti luentomonisteen määritelmiin, jotka eivät täyttäne tiukimpia formaaleja muotovaatimuksia. Esimerkiksi janan kohdalla olisi syytä puhua päätepisteistä vektoriin viittaavien alku- ja loppupisteen sijaan. Kulman määritelmässä selkeämpi ratkaisu olisi tarkemmin ilmaista myös puolisuorien olevan osa kulmaa. Tällöin nollakulma vastaisi tilannetta, jossa puolisuorat yhtyvät.

Opiskelijoiden kirjoittamista taso- ja avaruusgeometrian käsitteiden määritelmissä löytyi samanlaisuutta aiemmissa tutkimuksissa havaittuihin opettajaksi opiskelevien ja oppilaiden tekemiin määritelmiin (Marchis, 2012; Silfverberg & Matsuo 2008). Tässä sisällönanalyysissä korostui opiskelijoiden terminologisen osaamisen puutteet, mm. taso- ja avaruusgeometrian termien sekoittaminen keskenään. Monesti määritelmät eivät olleet määritelmän muodossa, vaan yläkäsite puuttui tai lueteltiin käsitteen osia. Tämän voisi tulkita siten, että opiskelija ei ole ymmärtänyt määrittelemisen ideaa. Toisaalta on huomioitava, että matemaattisten käsitteiden määrittelemisen opettelemiseen ei suomalaisessa koulujärjestelmässä kiinnitetä paljon huomiota (Silfverberg & Joutsenlahti, 2014), joten määritelmien kirjoittaminen on saattanut olla vaikeaa, vaikka opiskelijan käsitekuva olisikin ollut standarditulkinnan mukainen. Naiiveja kuvailuja tai väärien käsitteiden kuvailuja ilmeni verraten vähän. Aineistossa oli tyypillisesti määritelmiä, jotka eivät olleet minimaalisia vaan sisälsivät muista ominaisuuksista johdettavia ominaisuuksia. Riittämättömät ehdot -kategorian määritelmät olivat yleisiä. On mahdotonta tietää, yrittivätkö opiskelijat mielikuvatasolla koetella määritelmiensä oikeellisuutta vastaesimerkkiä etsien mutta eivät sellaista löytäneet, vai oliko kyseessä vain ulkoa opitun määritelmän väärin muistaminen. Aineistossa havaitut poikkeamat formaaleista määritelmistä voitaneen osin tulkita osoituksiksi tavoiteltua van Hielen tasoa 3 alhaisemmasta osaamisesta. Tämän tutkimus antaa viitteitä siitä, että luokanopettajaksi opiskelevien matematiikan kursseilla tulisi geometrisen käsitetiedon vahvistamisen lisäksi käsitellä määritelmän ideaa ja määrittelemistä matemaattisena toimintana sekä pyrkiä harjaannuttamaan opiskelijat matematiikan kielen mukaisten termien käyttöön. Lisäksi opettajaksi opiskelevien geometrisen käsitetiedon tasoa tulisi jatkossa tarkemmin analysoida.

LÄHTEET

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007.) An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(2), 115–131.

Battista, M. T. (2002). Learning Geometry in a Dynamic Computer Environment. *Teaching Children Mathematics*, *8*(6), 333–339.

Browning, C., Edson, A. J., Kimari, P. M., & Aslan-Tutak, F. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementtejä mathematics: A focus on geometry and measurent. *The Mathematics Enthusiast, 11*(2), 333–384.

Cunningham, R. F., & Roberts, A. (2010). Reducing the mismatch of geometry concept definitions and concept images held by pre-service teachers. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal 1*, 17 s. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/1.contentknowledge/cunningham01/article.pdf.

Duatepe-Paksu, A., İymen, E., & Pakmak, G. S. (2012). How well elementary teachers identify parallelogram? *Educational Studies, 38*(4), 415–418.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele. New York: Brooklyn College.

Hall, J. (2013). Teaching Algebra and Geometry with GeoGebra: Preparing Pre-Service Teachers for Middle Grades/Secondary Mathematics Classrooms. *Computers in the Schools, 30*(1/2), 12–29.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conseptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.), *Conseptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (s. 1–27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jackiw, N. (2010). Linking algebra and geometry: The dynamic geometry perspective. Teoksessa Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (toim.), *Future* *curricular trends in school algebra and geometry: Proceedings of a conference* (s. 231–241). Charlotte, NC: Information Age.

Joglar Prieto, N., Sordo Juanena, J. M., & Star, J. R. (2014). Designing Geometry 2.0 learning environments: a preliminary study with primary school students. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 45*(3), 396–416.

Kupari, P., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). Oppijalähtöistä pedagogiikkaa etsimään: Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen: Kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettanranta, J. (2013). PISA12 ensituloksia. *Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2013:20*.

Leikin, R., & Zazkis, R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 41*(4), 451–466.

Linchevsky, L., Vinner, S., & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. Teoksessa W. Geeslin & G. Karen (toim.) *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, s. 48–55). Durham, NH: PME.

Ma, H.-L. (2015). A study of van Hiele of geometric thinking among 1st through 6th graders. *Eurasia Journal of Mathematics, Science &Technology Education, 11*(5), 1181–1196.

Malaty, G. (1994). Geometrinen ajattelu. 1, Didaktiikka. Espoo: Weilin+Göös.

Marchis, I. (2012). Preservice primary school teachers' elementary geometry knowlegde. *Acta Didactica Napocensia, 5*(2), 33–40.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of Mathematics. Teoksessa R. Cohen Kadosh, A. Dowker (toim.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (s. 1118–1134). Oxford: Oxford University Press.

Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun oppilaan geometrinen käsitetieto. *Acta Electronica Universitatis Tamperensis 6*. Tampere: Tampereen yliopisto.

Silfverberg, H. & Joutsenlahti, J. (2014). Prospective teachers' conceptions about a plane angle and the context dependency of the conceptions. Teoksessa C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, D. Allan (toim.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 5, s. 185–192). Vancouver, Canada: PME.

Silfverberg, H. & Matsuo, N. (2008). Comparing Japanese and Finnish 6th and 8th graders' ways to apply and construct definitions. Teoksessa O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (toim.) *Proceedings of* *the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, s. 257–264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Star, J. R. & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: Exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 13*(2), 169–181.

Steele, M. D. (2013.) Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 245–268.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151–169.

Unal, H., Jakubowski, E., & Corey, D. (2009). Differences in learning geometry among high and low spatial ability pre-service mathematics teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 40*(8), 997–1012.

Van de Walle, J., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2009). Elementary and Middle School Mathematics: Teaching developmentally. Harlow: Pearson.

de Villiers, M. D. (2010). Some reflections on the van Hiele theory. Invited plenary presented at the 4th Congress of teachers of mathematics of the Croatian Mathematical Society, Zagreb, 30 June – 2 July 2010. http://frink.machighway.com/~dynamicm/vanhiele-reflection.pdf (Luettu 14.2.2016.)

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 1. *For the Learning of Mathematics, 20*(1), 17–21.

VIDEOVÄLITTEISTÄ FYSIIKAN OPETUSTA LUOKAN-OPETTAJAKOULUTUKSESSA

Antti Laherto[1] & Jussi Laherto[2]
[1]Helsingin yliopisto, [2]Lahden kaupunki, Möysän koulu

Raportoimme ja arvioimme uudentyyppisen opetuskokeilun, joka toteutettiin Helsingin yliopiston luokanopettajakoulutuksen fysiikan didaktiikan kurssilla yhteistyössä Lahden kaupungin Möysän koulun kanssa. LO-opiskelijat suunnittelivat ja toteuttivat opetusvideoita, joissa he antoivat ohjeita kokeellisista töistä 5-luokkalaisten fysiikan tunnille. Lahdessa oppilaat katsoivat videot, tekivät opastetut tutkimustehtävät ja videoivat lopputuloksen palautteeksi LO-opiskelijoille. Kyselytutkimukseen vastanneet LO-opiskelijat (n=130) kokivat oppineensa monipuolisesti fysiikan käsitteistä, kokeellisuudesta, ennakkokäsityksistä ja TVT:sta. Aitojen oppilastöiden opastaminen videon välityksellä vaikutti innostavalta työtavalta, vaikka siinä koettiin puutteitakin. Analysoimme työtapaa osana LO-koulutusta ja esitämme kehitysehdotuksia.

JOHDANTO

Tässä artikkelissa kuvaillaan ja arvioidaan uudenlaista opetuskokeilua, joka toteutettiin Helsingin yliopiston Opettajankoulutuslaitoksella Fysiikan didaktiikan kurssilla yhteistyössä lahtelaisen Möysän koulun kanssa.

Fysiikan didaktiikan perusosa -kurssi on osa LO-koulutuksen ainedidaktiikan opintoja eli perusopetuksessa opetettavien aineiden ja aihekokonaisuuksien monialaisia opintoja. Monialaiset opinnot muodostavat yhteensä 60 opintopisteen kokonaisuuden, joka on kolmasosa kasvatustieteen kandidaatin tutkinnosta (Tutkintorakenne, 2012). Fysiikan didaktiikan perusosa on kaikille pakollinen kurssi, jonka laajuus on 3 opintopistettä.

Opetussuunnitelman (Opinto-opas, 2015) mukaan kurssilla

- Tutustutaan opetussuunnitelman perusteisiin
- Perehdytään fysiikkaan tieteenä, fysiikan tiedon luonteeseen ja tiedon hankkimiseen ja oikeuttamiseen
- Käsitellään liike- ja voima-, sähkö- ja magnetismi-, lämpö- ja energia- sekä aaltoilmiöiden malleja kvalitatiivisella tasolla sekä ja perehdytään näihin liittyviin oppilaiden käsityksiin.
- Tutustutaan kokeelliseen työskentelyyn koululaboratoriossa.
- Tutustutaan tieto- ja viestintätekniikan käyttöön fysiikan opetuksessa.

Nämä keskeiset tavoitteet ja sisällöt ovat linjassa LO-koulutuksen yleisten tavoitteiden (Opinto-opas, 2015) kanssa. Esimerkiksi tieto- ja viestintätekniikan (TVT) käytön taidot on keskeinen yleistavoite läpi koko koulutuksen. Se on myös laaja-alaisen osaamisen alue uudessa perusopetuksen opetussuunnitelmassa (OPH, 2014).

Tässä raportoitava opetuskokeilu liittyy useisiin tutkimuksen osoittamiin haasteisiin LO-koulutuksessa. LO-opiskelijoiden suhde teknologiaan on havaittu usein ongelmalliseksi, ja tällä on suuri vaikutus opettajien antaman teknologiakasvatuksen muotoon ja sisältöön (Goktas, Yildirim & Yildirim, 2009; Kärkkäinen & Keinonen, 2010). Luonnontieteiden opetuksessa kokeellisen työskentelyn taidot ja tutkimusperustainen opetus (*inquiry-based science education)* vaatii tietoja ja taitoja, joissa LO-opiskelijat usein kokevat epävarmuutta (Alake-Tuenter, 2012). Tämä epävarmuus linkittyy tulevien luokanopettajien tyypillisesti kielteisiin asenteisiin fysiikkaa kohtaan (Kapucu, 2014).

Näihin kaikkiin LO-koulutuksen haasteisiin pyrittiin tarttumaan seuraavassa kuvailtavalla opetuskokeilulla. Edellä mainittujen tavoitteiden lisäksi ideana oli saada LO-opiskelijat kontaktiin oikeiden oppilaiden kanssa jo osana monialaisia opintoja. Yleensä opiskelijat saavat tämän kokemuksen vasta opetusharjoitteluissa.

OPETUSKOKEILU

Opetuskokeilu toteutettiin syksyllä 2013 osana Fysiikan didaktiikan perusosa –kurssia, jolle ilmoittautui 145 opiskelijaa. Ensin valittua aihealuetta, ”liikeilmiöt”, käsiteltiin neljä tuntia luennoilla ja neljä tuntia opetuslaboratoriossa käyden läpi mekaniikan peruslakeihin ja vuorovaikutuksiin liittyviä keskeisiä ilmiöitä ja havaintoja. Sitten LO-opiskelijat tekivät omatoimisesti 4-5 hengen ryhmissä suunnitelman tai käsikirjoituksen opetusvideosta viidesluokkalaisille. Videon aiheena tuli olla jokin liikeilmiö, ja videon tuli sisältää lyhyen opetustuokion (max. 3 min) sekä siihen liittyvän tehtävänannon oppilastyöstä. Tehtävänanto sai olla suljettu tai avoin, mutta kuitenkin selkeä ohjeistus kokeellisesta työstä tai tutkimuksesta, jonka oppilaat toteuttavat pareittain yhden oppitunnin aikana. LO-opiskelijoille vinkattiin, että tehtävänanto voi olla useampivaiheinen: siinä voi esim. pyytää oppilaita ensin tekemään ennusteen, sitten tekemään kokeen, sitten pohtimaan havaintojaan ja raportoimaan videolle. Myös kotitehtävän sai antaa. LO-opiskelijoille kerrottiin Möysän koululla käytettävissä olevat välineet, joiden lisäksi käytössä oli tavalliset koulusta ja kotoa löytyvät tarvikkeet sekä etukäteen pyydettäessä muitakin tarvikkeita.

Videoiden suunnitelmat hiottiin ja videot toteutettiin alusta loppuun yhden neljän tunnin ryhmäkokoontumisen aikana. Ensin käsikirjoitukset esiteltiin ja muut opiskelijat ja opettaja antoivat vielä kehitysideoita ennen toteuttamista. Opiskelijaryhmät kuvasivat videomateriaalin OKL:n eri tiloissa käyttäen valintansa mukaan joko OKL:n videokameroita (opettaja antoi teknisen tuen) tai omia älypuhelimiaan. Videot editoitiin laboratorioluokan PC:illä Windows Live Movie Maker -ohjelmalla (opettaja antoi pikakoulutuksen) tai muilla ohjelmilla. Lopuksi opiskelijat siirsivät valmiin videon pilvipalveluun (Dropbox) Möysän koulun oppilaiden katsottaviksi.

Yhteensä videoita valmistui 33 kappaletta. Opiskelijat käyttivät videoissaan paljon luovuutta, huumoria ja erilaisia esitystapoja. Aihealueet kattoivat laajasti mekaniikan peruslakeihin sekä eri vuorovaikutuksiin liittyviä ilmiöitä ja havaintoja. Esitystapoina oli opettajan kerrontaa, demonstraatioita sekä havainnollistavia videoklippejä, kuvia ja kaavioita.

Lahdessa hankkeeseen osallistui Möysän koulun viides luokka yhden kouluviikon ajan. Luokalla opiskeli 31 oppilasta, joista noin puolet oli tyttöjä ja puolet poikia. Fysiikan ja kemian oppiaineeseen oli varattu vain yksi vuosiviikkotunti vuosityösuunnitelmassa, mutta erikoisjärjestelyin hankkeeseen varattiin noin kuusi oppituntia yhdelle viikolle. Oppiaineen tunteja käytettiin myöhemmin toisten oppiaineiden opetukseen. Hankkeessa käsitelty mekaniikan jakso tuli käsiteltäväksi hankkeen videoiden kautta ilman ennakkoperehtymistä.

Koulussa kokeilu eteni siten, että kullekin pienelle ryhmälle (2-3 oppilasta) annettiin linkki muutamaan LO-opiskelijoiden videoon. Tehtäväksi annettiin katsoa video, tehdä videossa annettu fysiikan koetehtävä, videoida tehtävän suoritus ja laatia muut mahdolliset tehtävänantovideossa annetut tehtävät, esimerkiksi pohdintatehtävät. Tehtävän teon ja videokuvausten jälkeen oppilasryhmä editoi iPadin iMovie –sovelluksella vastausvideon ja tallensi sen YouTube –palveluun. Lopuksi opettaja koosti vastausvideoiden linkit listaksi ja tallensi listan hankkeessa käytettyyn pilvipalveluun (Dropbox) edelleen LO-opiskelijoille jaettavaksi. Jakson sisältöjä käsiteltiin tämän jälkeen siten, että ensin keskeiset asiat käsiteltiin oppikirjasta, sitten koko luokka yhdessä reflektoi oppimaansa katsellen tehtävänanto- ja vastausvideoita. Lopuksi oppilaille pidettiin jakson aiheista perinteinen koe.

Lopulta OKL:ssa LO-opiskelijat katsoivat ja kommentoivat omia ja toistensa opetusvideoita sekä oppilaiden videoita sekä omatoimisesti että yhdessä kurssin päätöskerralla.

Videoiden tekijänoikeus- ja yksityisyydensuojakysymyksiin kiinnitettiin erityistä huomiota. Kurssin aikana pääsy videoihin oli vain kokeiluun osallistuneilla opiskelijoilla, oppilailla ja opettajilla. Kurssin jälkeen LO-opiskelijoiden tekemät videot koottiin videopankiksi, jota projektiin osallistuneet voivat hyödyntää omassa opetuksessaan ja esitelmissään. Kaikki osapuolet sitoutuivat siihen, ettei videoita anneta muille eikä julkaista ilman videontekijöiltä erikseen kysyttävää suostumusta. Opiskelijoille tarjottiin myös oikeus kieltää videonsa käyttö em. tarkoituksissa. Kurssin jälkeen Möysän koulun oppilaiden tekemät videot eivät olleet missään käytössä ilman erikseen kysyttävää lupaa, eikä oppilailla ollut pääsyä LO-opiskelijoiden tekemiin videoihin.

TUTKIMUSKYSYMYS JA –MENETELMÄ

Tutkimuksessa vastattiin seuraavaan tutkimuskysymykseen: *Miten luokanopettajaopiskelijat kokevat videovälitteisen kokeellisten töiden ohjaamisen osana fysiikan didaktiikkaa?*

Tutkimuskysymykseen pyrittiin vastaamaan teettämällä asiaa koskeva kysely opetuskokeiluun osallistuneiden LO-opiskelijoiden parissa. Kysely toteutettiin kurssin Moodle -verkkoalustalla osana kurssin anonyymiä palautekyselyä. Näin varmistettiin, että kaikki vastanneet olivat kurssin opiskelijoita, kukin heistä saattoi vastata korkeintaan kerran ja vastauksia ei voitu yhdistää yksittäisiin vastaajiin. Vastausaikaa oli kaksi viikkoa kurssin päättymisen jälkeen.

LO-opiskelijoiden kokemusta videovälitteisestä opetuskokeilusta kartoitettiin yhdellä seitsemänosaisella Likert -asteikollisella kysymyksellä ja kahdella avoimella kysymyksellä. Suljettu kysymys oli seuraava: ”Kuinka paljon opit kurssin videoprojektissa (sis. videoiden suunnittelu ja toteutus sekä oppilaiden videoiden katsominen ja analysointi) a) fysiikan sisällöistä; b) fysiikan opettamisesta; c) kokeellisesta työskentelystä; d) fysiikan luonteesta tieteenä; e) oppilaiden käsityksistä ja valmiuksista; f) opetussuunnitelman perusteista fysiikan osalta; g) tieto- ja viestintätekniikan käytöstä”. Jokaiseen näihin seitsemään alakysymykseen, jotka liittyivät kurssin tavoitealueisiin (ks. Johdanto), vastattiin neliportaisella Likert -asteikolla ’en mitään’, ’vain vähän’, ’melko paljon’ tai ’hyvin paljon’. Avoimet kysymykset puolestaan kuuluivat yksinkertaisesti ”Mikä oli hyvää videoprojektissa?” ja ”Mikä oli huonoa videoprojektissa?”.

130 opiskelijaa vastasi kyselyyn. Kurssille oli 145 opiskelijaa, joista 136 jatkoi kurssin loppuun asti ja osallistui tenttiin. Vastausprosentti oli huomattavan korkea johtuen siitä, että opiskelijoita painokkaasti pyydettiin ja he ilmeisesti myös halusivat antaa palautetta tästä uudenlaisesta opetusmuodosta. Lähes kaikki vastaajat antoivat myös sanallista palautetta kaikkiin avoimiin kysymyksiin, joten saatu aineisto oli rikasta. Vastanneiden sukupuolijakauma vastasi kurssilaisten jakaumaa (naisia 87%, miehiä 13%).

Suljettujen Likert –tyyppisten kysymysten vastaukset analysoitiin yksinkertaisella tilastollisella frekvenssianalyysillä, jonka tavoitteena oli vain antaa kokonaiskuva siitä, mihin tavoitealueisiin liittyviä asioita ja valmiuksia LO-opiskelijat kokivat oppineensa opetuskokeilussa.

Kuvaa opiskelijoiden oppimiskokemuksesta tarkennettiin analysoimalla avointen kysymysten vastauksia. Opiskelijoiden sanallisia vastauksia tarkasteltiin luokittelemalla ne aluksi tavoitealueittain. Kvalitatiivisen sisältöanalyysin (Patton, 1990) tavoitteena oli löytää aineistosta teemat ja väitteet, jotka toistuvat vastauksissa ja kuvaavat aineistoa kokonaisuutena.

TULOKSET

Suljettujen kysymysten vastausjakaumasta (Taulukko 1) nähdään, että LO-opiskelijat kokivat oppineensa opetuskokeilussa kaikilla kurssin tavoitealueilla. Eniten – yli 90%:n mielestä vähintään 'melko paljon' – opiskelijat sanoivat oppineensa fysiikan opettamisesta (b) ja kokeellisesta työskentelystä (c). Myös fysiikan sisällöistä (a), oppilaiden käsityksistä ja valmiuksista (e) ja TVT:n käytöstä (g) opiskelijat kokivat oppineensa huomattavasti (yli 80%:n mielestä vähintään 'melko paljon'). Vähiten oppimishyötyä nähtiin tavoitealueissa 'fysiikan luonne tieteenä' (d) ja 'OPS:n perusteet fysiikan osalta' (f), joissa 40-50% vastaajista sanoi oppineensa melko vähän tai ei mitään.

Taulukko 1. Vastausten jakauma suljettuun Likert -asteikolliseen kysymykseen. Vastausten lukumäärän jälkeen on esitetty sulkeissa prosenttiosuudet kaikista vastanneista (n=130) kokonaisluvuiksi pyöristettyinä.

Kuinka paljon opit videoprojektissa…	hyvin paljon	melko paljon	melko vähän	en mitään
a) fysiikan sisällöistä	28 (22%)	77 (59%)	25 (19%)	0 (0%)
b) fysiikan opettamisesta	58 (45%)	62 (48%)	9 (7%)	1 (1%)
c) kokeellisesta työskentelystä	60 (46%)	63 (48%)	63 (48%)	0 (0%)
d) fysiikan luonteesta tieteenä	15 (12%)	61 (47%)	52 (40%)	2 (2%)
e) oppilaiden käsityksistä ja valmiuksista	48 (38%)	53 (41%)	23 (18%)	4 (3%)
f) OPS:n perusteista fysiikan osalta	12 (9%)	52 (40%)	62 (48%)	3 (2%)
g) TVT:n käytöstä	48 (37%)	60 (46%)	19 (15%)	3 (2%)

Opiskelijoiden vastaukset avoimiin kysymyksiin heijastelivat tätä suljettujen kysymysten tulosta ja antoivat lisäymmärrystä siitä, miten opetuskokeilu toimi eri tavoitealueilla. Seuraavassa esitämme, miten opiskelijat sanallisissa vastauksissaan kuvasivat eri tavoitealueiden toteutumista. Sitaatteja pyrittiin valitsemaan niin, että ne kuvaavat opiskelijoiden vastauksia edustavasti sekä teemaltaan että sävyltään. Sitaateista on korjattu muutamia ilmeisiä kirjoitusvirheitä.

Fysiikan opettamiseen (b) ja **kokeelliseen työskentelyyn** (c) liittyvissä vastauksissaan opiskelijat korostivat oppineensa näitä asioita erityisen paljon siksi, että videoiden suunnittelu pakotti miettimään ja kokeilemaan opetusratkaisuja itse hyvin käytännöllisesti:

> Yritettiin pilkkoa video helposti hyödynnettäväksi ja eheäksi kokonaisuudeksi, josta oppilaat saisivat mahdollisimman paljon irti, joten pohdittiin paljonkin fysiikan opetuksen didaktista puolta.
>
> […] Sai todella miettiä, kuinka jonkun asian opettaa oppilaille, mikä oli loistavaa! Siihen saa mahdollisuuden hämmästyttävän harvoin täällä.
>
> Videota varten sai itsekin suorittaa kokeen, mikä edisti oppimista ja herätti uusia mielenkiintoisia kysymyksiä.

Opiskelijat pitivät kokeilua tehokkaana myös **fysiikan sisältöjen** (a) ja käsitteiden oppimiseen. Opiskelijoiden sanallisessa palautteessa näkyy vanha viisaus siitä, että opettaessa asiat oppii myös itse.

> Ymmärsin ja hahmotin fysiikan ilmiöitä paremmin kun olin itse pyrkinyt saamaan ne mahdollisimman ymmärrettävään muotoon ja havainnollistanut niitä. Oppilaatkin hyötyvät siitä, että opettajalla on itsellään selkeä kuva opittavasta asiasta.
>
> Joutui todella pohtimaan, jotta ymmärtäisi sen ilmiön, mitkä oli tarkoitus havannollistaa.
>
> Videoprojekti innosti pohtimaan tiettyjä fysiikan sisältöjä ja niiden havainnoimista syvällisemmin.

Opetuskokeilussa hyödynnettiin videokameroita, editointiohjelmia, pilvipalveluja ja opiskelijoiden omia laitteita. Opiskelijat nostivat tämän **tieto- ja viestintätekniikan** (g) opettelun tärkeäksi ja tarkoituksenmukaiseksi osaksi kokeilua. Samalla monet huomauttivat, että LO-koulutuksessa nämä tavoitteet usein edelleen laiminlyödään.

> Mahtava idea, hyvin käytetty tietoteknisten laitteiden vahvuuksia hyväksi. Suurimmalta osalta meistä opiskelijoista varmasti löytyy itseltään jo puhelin/tabletti jolla pystyy ottamaan hyvää videokuvaa. Tämä herätti ajattelemaan, että niitä tosiaan voi käyttää opetuskäytössäkin.
>
> Koin myös projektin itselleni hyödylliseksi siinäkin mielessä, että teknologiakammoni pienentyi.

> Oli hyvin virkistävää, että pääsimme käyttämään tieto- ja viestintätekniikkaa, sillä sen käyttöä on liian vähän mukana luokanopettajan koulutuksessa.
>
> Itselle TVT:n käyttö ei tuota ongelmia, mutta jotkut saivat vielä hyvää harjoitusta ihan perustietokoneohjelmien käytössä ja se taito ei varmasti mene koskaan hukkaan.

Toisaalta monet kaipasivat enemmän ohjausta ja eksplisiittistä huomiota TVT:n käyttöopiskeluun.

> Ohjeistus heikohkoa videon tekemiseen. Elämäni eka videointiprojekti aiheutti kohtuullisen paljon stressiä
>
> Kukaan ryhmässämme ei tainnut osata käyttää videoeditointilaitteita kovin hyvin, ja päädyimme siksi tekemään sellaisen videon, jossa editointia ei tarvinut. Eli sitä puolta ei oppinut nytkään, kun ei ollut aikaa opetella sitä erikseen.

Ehkä odotetustikin eniten sanallista opiskelijapalautetta – sekä kehuja että kehitysideoita – kirvoittivat asiat, jotka liittyivät oppilaskontaktiin, mikä olikin kokeilun erikoispiirre. Kokeilu näytti tehokkaasti avanneen opiskelijoiden silmiä **oppilaiden käsityksiin ja valmiuksiin** (e) fysiikan suhteen.

> […] Lisäksi projektin aikana oli jatkuvasti mietittävä lasten osaamisen tasoa ja valmiuksia
>
> Etenkin palautevideo opetti huomaamaan kuinka vaikeaa lasten on pohtia fysiikan ilmiöitä.

Opiskelijat arvostivat todella korkealle sitä, että saivat opetusvideoistaan palautetta ”oikeilta oppilailta”. Tämä oli opiskelijoiden mielestä poikkeuksellista, hyödyllistä ja innostavaa:

> Oppilaiden tekemien videoiden avulla pystyi reflektoimaan sitä, mikä oman ryhmän videossa oli onnistunut ja mikä ei, ja mitkä asiat oli opittu ja mitkä taas ehkä jääneet epäselväksi.
>
> Tehtiin töitä OIKEIDEN oppilaiden kanssa ja palaute omasta opettamisesta oli välitön. Erinomainen työskentelymuoto, sopisi muillekin OKL:n kursseille!
>
> Oli mukavaa että yhteistyökoulun oppilaat olivat yhtä innostuneita kuin me opiskelijat!

Toisaalta, moni opiskelija oli lopulta myös pettynyt palautteen määrään ja laatuun:

> […] oppilailta saatu palaute jäi omalla ryhmällä todella vähäiseksi. Olisi ollut mukavampi kuulla enemmän pohdintoja, mutta ei tajuttu ohjeistaa niitä kai tarpeeksi...
>
> Oppilaiden palaute olisi voinut olla osan kohdalta hieman parempi, kuin 10 sek. pätkä vessasta.

> Oppilaille tuli niin paljon tekemistä, että vastausvideo jäi vähän tyngäksi koska opettaja ei ole ehtinyt seuraamaan, mitä oppilaat tekevät ja puhuvat.

Toimiva kokeellisen työn ohjeistus oli selvästikin haastava antaa videon välityksellä. Kun video oli tehty, opetustilannetta ei ollut enää mahdollista korjata tai hienosäätää.

> Ei pystynyt kommunikoimaan oppilaiden kanssa, ei antamaan palautetta tai neuvoa. Meidän vastauksessa oppilaat eivät juurikaan pohtineet ilmiötä, ja olisikin ollut kiva jos vuorovaikutusta olisi voinut jatkaa.

Näistä huonoista kokemuksista huolimatta lähes kaikki opiskelijat näkivät oppilaskontaktin – videovälitteisenkin – tekijänä, joka todella motivoi poikkeuksellisella tavalla:

> Oli opiskelijalle erityisen motivoivaa, että kurssitehtävä tuli oikeasti oppilaiden käyttöön: se motivoi tekemään videoista sisällöllisesti hyvän ja pakotti myös miettimään asioita didaktisesta näkökulmasta.

Tähän motivoivuuteen monilla opiskelijoilla liittyi myös ajatus siitä, että opetuskokeilussa tehtiin autenttista opetusta, josta oli konkreettista hyötyä – sekä Möysän koululaisille välittömästi että opiskelijoille itselleen jatkoa ajatellen:

> Näennäisissä opetustuokioiden suunnittelussa jää yritys yleensä alle kykyjen. Videoiden suunnittelussa sen sijaan keskittyi hieman enemmän kun tiesi sen menevän ns. todelliseen käyttöön.

> Tällaisia projekteja saisi olla muissakin aineissa, koska projektin kautta muodostuu yhteys työelämään.

> Omaa videota mahdollisuus käyttää omassa opetuksessa. Muiden videoista hyviä ideoita. Oppilailta saatu palaute ainutlaatuista. Molemminpuolinen hyöty.

Vähiten oppimishyötyä nähtiin tavoitealueissa **fysiikan luonne tieteenä** (d) ja **OPS:n perusteet fysiikan osalta** (f), vaikka joitain havaintoja opiskelijat niihinkin liittyen tekivät:

> Lisäksi opetettavaa ilmiötä tuli pohdittua oikein kunnolla, mikä syvensi ymmärrystä fysiikan luonteesta.

> Oli myös pakko tutustua kunnolla opetussuunnitelmaan, ja tämä oli mielekäs tilaisuus pohtia menetelmiä niiden käsittelemiseksi.

JOHTOPÄÄTÖKSET

Kokeilun toimivuus osana LO-koulutusta

Opiskelijapalautteen perusteella tässä raportoitu videovälitteinen opetuskokeilu toteutti luonnontieteiden didaktiikalle asetettuja tavoitteita (Opinto-opas, 2015; Tutkintovaatimukset, 2012) monipuolisesti ja lisäksi paransi LO-opiskelijoiden mielikuvaa fysiikasta (vrt. Kapucu, 2014). Erityisesti kokeilu edisti niitä tavoitealueita, joiden toteuttamisessa on vaikeuksia perinteisin OKL:n kurssien menetelmin: TVT:n käyttötaidot sekä ymmärrys oppilaiden käsityksistä ja valmiuksista. Samalla toki huomattiin rajoitteet, joita on videovälitteisessä kontaktissa oikeisiin oppilaisiin: on hyvin hankala suunnitella tehokasta opetusta ja kokeellisen työn ohjeistusta, jossa oppilaita ei pääse ohjaamaan paikan päällä ja tilanteen mukaan. Tähän liittyy myös mahdollinen eettinen ongelma 'oppilaiden kustannuksella' oppimisesta, jota LO-opiskelijat eivät kuitenkaan nostaneet esiin: ohjauskontaktin rajallisuudesta johtuen joillekin oppilaille saattaa jäädä vääriä käsityksiä opetettavista asioista. Kokeilu osoitti kokeellisten töiden ohjauksen haastavuuden; kuten eräs opiskelija havaitsi:

> oppilaiden palautevideosta kävi harvinaisen selväksi, että opettajaa tarvitaan, pelkät kokeet ei millään riitä fysiikan tiedon omaksumiseen.

Opiskelijat pitivät opetusvideoiden tekemistä otollisena tapana TVT:n käytön opiskeluun, ja moittivat usein samalla sitä, että yleensä ottaen opinnoissaan on opetusteknologiakoulutusta vähänlaisesti tarpeeseen ja tavoitteisiin nähden. Tämä tarve on todettu LO-koulutusta koskevassa tutkimuksessakin (esim. Kärkkäinen & Keinonen, 2010; Goktas, Yildirim & Yildirim, 2009).

Tämäkin kurssipalaute jälleen vahvisti sen tiedon, että LO-opiskelijat kokevat paljon epävarmuutta fysiikan aineenhallinnassa ja toivovat tukea nimenomaan siihen fysiikan didaktiikan kurssilta (vrt. Alake-Tuenter, 2012; Kapucu, 2014). Vaikka tässä raportoidun opetuskokeilun ensisijainen tavoite ei ollutkaan fysiikan käsitteellisen hallinnan vahvistaminen, opiskelijat arvioivat oppineensa videoita suunnitellessaan erityisen paljon juuri siitä. Ilmeisesti myös se, että videot menivät todelliseen opetuskäyttöön, motivoi vastuuntuntoiset opiskelijat omaksumaan fysiikan sisällöt syvällisesti.

Palautteen perusteella opiskelijat todella arvostivat sitä tämän opetuskokeilun erityispiirrettä, että he pääsivät didaktiikan kurssilla kontaktiin oppilaiden kanssa ja saivat heiltä palautetta – kuitenkin suorituspaineita helpottavalla 100 km:n turvavälillä! Tästä kontaktista tulleet lupaukset eivät kuitenkaan täysin toteutuneet: monet opiskelijat valittivat palautteen ohuudesta. Vastaisuudessa kurssilla kannattaisi varata enemmän aikaa kokemusten purkamiseen ja palautteen antamiseen. OKL:n opettajan antaman palautteen ohella tai sijasta opiskelijat ehdottivat vertaispalautteen järjestämistä. Lisäksi LO-opetuksen kannalta olisi selvästikin hyvä, jos koululaisilla olisi enemmän aikaa ja ohjausta käytettävissä kokeellisten töiden tekoon ja vastausvideoiden laatimiseen. Tämä on kuitenkin hankala toteuttaa tämän ensikokeilun opiskelija- ja videomäärillä, kuten seuraavassakin ilmenee.

Kokeilun toimivuus alakoulun kannalta

Vaikka Möysän koulun oppilasryhmä oli harjaantunut videokuvauksessa ja editoimisessa sekä pilvipalvelujen käytössä aiemmin, luokan opettajalla pääosa oppituntien ajasta kului teknisten neuvojen antamisessa ja ongelmien ratkaisemisessa. Oppilaat eivät ehtineet juuri saamaan tukea ja ohjausta vastausvideoiden sisällöllisiin kysymyksiin, mikä näkyi muutamien oppilasryhmien vastauksissa. Toisaalta, opiskelijat saivat nyt realistista palautetta lasten ohjeenluku- ja ymmärtämistaidoista ja fysikaalisten ilmiöiden ymmärtämisen haasteista. Oppilaiden fysiikan oppimisen näkökulmasta katsottuna ennakkoperehtyminen aiheeseen olisi ehkä ollut jälkikäteen arvioituna kannattavaa.

Möysän koulun opettajan havaintojen mukaan oppilaat kokivat hankkeen erittäin motivoivaksi ja virkistäväksi tavaksi työskennellä. Työskentelyn omaehtoisuus, oma keksiminen ja oivaltaminen sekä tekniikan innostava käyttö vastausvideoita laadittaessa olivat selvästi motivaatiota lisääviä seikkoja. Lisäksi hankkeeseen osallistunut opettaja sai uusia ideoita ja materiaaleja.

Aikataulu oli ongelmallinen koululle johtuen OKL:n kurssin intensiivisyydestä. Vastausvideot tuli saada muutamassa päivässä kuvattua, editoitua ja tallennettua. Möysän koululla oppilaiden käytössä olleet taulutietokoneet, fysiikan havaintomateriaalit sekä hyvin toimiva langaton lähiverkko tukivat hankkeen onnistumista, kuten myös se, että oppilaat olivat aiemmin käyttäneet hankkeessa hyödynnettyjä laitteita ja ohjelmistoja.

LÄHTEET

Alake-Tuenter, E., Biemans, H., Tobi, H., Wals, A., Oostenheert, I. & Mulder, M. (2012). Inquiry-Based Science Education Competencies of Primary school Teachers: A literature study and critical review of the American National Science Education Standards. *International Journal of Science Education, 34*(17), 2609-2640.

Goktas, Y., Yildirim, Z. & Yildirim, S. (2009). Investigation of K-12 Teachers' ICT Competences and the Contributing Factors in Acquiring These Competences. *New Educational Review, 17*(1), 276-294.

Kapucu, S. (2014). Salient beliefs of pre-service primary school teachers underlying an attitude "liking or disliking physics". *Science Education International, 25*(4), 437-458.

Kärkkäinen, S. & Keinonen, T., 2010. Primary school teacher students' perceptions of technology. *Problems of Education in the 21st Century, 19*. 27-35.

OPH, 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Määräykset ja ohjeet 2014:96. Opetushallitus.

Opinto-opas, 2015. Luokanopettajakoulutuksen (kasvatustiede) opinto-opas 2015-2016. Helsingin yliopisto. Haettu 29.5.2015 https://weboodi.helsinki.fi/

Tutkintorakenne, 2012. Luokanopettajan koulutus (pääaineena kasvatustiede). Käyttäytymistieteellisen tiedekunnan koulutusten tutkintovaatimukset 2012-2015. Helsingin yliopisto. Haettu 29.5.2015 http://www.helsinki.fi/behav/opiskelu/vaatimukset/2012-2015/luokanopettajan_kasvatustiede.pdf

KEMIAN LuK-OPISKELIJOIDEN LÄHESTYMISTAVAT OPPIMISEEN JA HALU VAIHTAA PÄÄAINETTA

Mika Lastusaari[1], Eero Laakkonen[2] & Mari Murtonen[2]

[1]Turun yliopisto, Kemian laitos, [2]Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos

Kemian oppiaineen ongelmana suomalaisissa yliopistoissa on ollut pääainetta vaihtavien määrän suuruus. Tässä tutkimuksessa selvitettiin erityisesti kemian opiskeluun liittyvällä lomakkeella kemian opiskelijoiden lähestymistapoja oppimiseen ja niiden yhteyttä halukkuuteen vaihtaa pääainetta. Tutkimuksen tuloksena oli, että pääaineen vaihtoa haluavilla on pinnallisempi lähestymistapa oppimiseen kuin niillä, jotka jatkavat opintojaan kemia pääaineenaan. Siirryttäessä perusopinnoista aineopintoihin vaihtohalukkaiden määrä laskee huomattavasti ja käytännöllinen syväoppimisen lähestymistapa lisääntyy. Vaihtohalukkuutta voitaisiin mahdollisesti vähentää kehittämällä opiskelijoiden syväoppimisen lähestymistapaa.

JOHDANTO

Turun yliopistossa aloittaa kemian pääaineopinnot vuosittain 60 opiskelijaa. Toisena opintovuonna pääaineopiskelijoiden määrä on noin 15-20, joista kandidaatin tutkinnon suorittaa käytännössä jokainen. Pääainetta vaihtavien määrä on siis hyvin suuri ja tämä aiheuttaa ongelmia oppiaineelle: Ensimmäisen vuoden opetukseen tarvitaan paljon opetusresursseja, mutta tutkinnoista saatava rahoitushyöty laitoksen toiminnalle jää näihin nähden pieneksi. Tämä pulma ei koske pelkästään Turun yliopistoa, sillä muissakin yliopistokaupungeissa, joissa tarjotaan lääketieteen opetusta, on samankaltainen tilanne (esim. Ruuska, 2010; Nykänen, 2013). Ongelma ei myöskään koske vain kemian oppiainetta, vaan myös muita aineita, esimerkiksi fysiikkaa, joiden ensimmäisten vuosien opetus toimii hyvänä valmennuksena lääketieteen opiskelijoiksi haluaville (esim. Ruuska, 2010; Nykänen, 2013).

Yliopisto-opiskelijoita tutkittaessa on huomattu, että opiskelijoiden lähestymistavat oppimiseen ovat erilaisia. Jotkut opiskelijat lähestyvät oppimista pinnallisemmin yrittäen muistaa opittavia asioita ulkoa (pintasuuntautunut oppiminen), kun taas toiset ovat syvällisempiä lähestymistavassaan, yrittäen ymmärtää opittavana olevia asioita (syväsuuntautunut oppiminen) (esim. Lastusaari & Murtonen, 2013; Lindblom-Ylänne, Parpala & Postareff, 2014). Syväsuuntautuneella opiskelijalla on tyypillisesti positiivisia ajatuksia opittavaa asiaa kohtaan. Hän mieltää opittavan asian merkitykselliseksi ja tuntee oppimisessa positiivista haastetta, innostusta sekä mielihyvää. Pintasuuntautuneelta oppijalta taas tällaiset positiiviset tuntemukset puuttuvat (Howie & Bagnall, 2013). Täten lähestymistapa on yhteydessä motivaatioon ja kiinnostukseen, jotka ovat keskeisiä tekijöitä opiskelijoiden pohtiessa pääaineen vaihtoa.

Opiskelijoiden lähestymistapoja oppimiseen on tutkittu jo 1970-luvulta lähtien (Marton & Säljö, 1976; Biggs, 1987; Entwistle & Ramsden, 1983). Uudemmassa tutkimuksessa on huomattu yksiköiden välisten erojen lisäksi, että lähestymistavat eivät ole yksilökohtaisestikaan pysyviä, vaan vaihtelevat ajan, tilanteen ja opittavan sisällön suhteen (Lindblom-Ylänne, Parpala & Postareff, 2014; Vermunt & Vermetten, 2004). Opiskelijat saattavat olla hyvinkin joustavia käyttämiensä lähestymistapojen suhteen. Opiskelija saattaa vaikkapa samana päivänä toimia pintasuuntautuneesti yhdellä opintojaksolla ja syväsuuntautuneesti toisella opintojaksolla. Tähän vaikuttaa opiskelumotivaatio, esimerkiksi kuinka kiinnostavana opiskeltavaa aihetta pidetään, tai jokin muu seikka, kuten henkilökohtainen tilanne.

Syväsuuntautunut oppimistapa on tutkimusten mukaan yhteydessä hyviin oppimistuloksiin, joten opiskelijoita tulisi tukea sen kehittämisessä. Tutkimusnäyttöä onkin, että syväsuuntautuneen lähestymistavan käyttöä voidaan vahvistaa opetuksessa (esim. Baeten, Kyndt, Struyven & Dochy, 2010; Dolmans, Wolfhagen & Ginns, 2010). Jos esimerkiksi tiedämme, että tietyn alan opiskelijoilla on tapana suuntautua tietyssä oppimistilanteessa tietyllä tavalla, tähän voidaan yrittää saada muutos opetuksen avulla.

Oppimisen lähestymistapojen tutkimuksissa on pääsääntöisesti käytetty yleisiä, kaikille aloille soveltuvia lomakkeita (esim. Lovatt ym., 2007). Kemian opiskelussa on kuitenkin erityispiirteitä, jotka eivät tule yleisissä lomakkeissa esille. Laboratorioharjoitusten runsas määrä on tyypillistä kemian opinnoille, ja niihin liittyvää oppimista ei olemassa olevilla lomakkeilla ole mahdollista tutkia. Aiemmassa tutkimuksessamme testasimme lomaketta, jossa oli otettu huomioon laboratorioharjoitukset osana oppimisprosessia (Lastusaari & Murtonen, 2013). Tulosten perusteella nimenomaan käytännöllinen syväoppimisen lähestymistapa laboratoriotyöskentelyssä on tyypillistä opiskelijoille, jotka menestyvät opinnoissaan ja haluavat jatkaa opintojaan. Seuraavassa tutkimuksessamme kehitimme kemian oppimisen lähestymistapoja mittaavaa lomaketta validoimalla ChemApproach-lomakkeen (Lastusaari, Laakkonen & Murtonen, 2016). Tässä tutkimuksessa tavoitteena on testata kehitetyn ja validoidun lomakkeen toimivuutta Turun yliopiston kemian pääaineopiskelijoilla. Tutkimuskysymyksenä on, ovatko oppimisen lähestymistavat yhteydessä pääaineen vaihtohalukkuuteen.

MENETELMÄT JA AINEISTO

Oppimisen lähestymistapojen, eli syvä- ja pintaoppisen tutkimukseen tarkoitettuja yleisiä kyselyjä on olemassa monia, kuten Biggsin Study Process Questionnaire (SPQ), Entwistlen Approaches to Study Skills Inventory for Students (ASSIST) (esim. Lovatt ym., 2007) ja Inventory of Learning Styles in Higher Education (ILS) (Vermunt, 1994). Näitä onkin käytetty useiden alojen, kuten psykologian (Lonka & Lindblom-Ylänne 1996), lääketieteen (Dolmans ym. 2010) ja kemian (Zeegers 2001) opiskelijoiden tutkimiseen. Erityisesti kemian oppimisen lähestymistapojen tutkimiseen ei kuitenkaan ole olemassa lomaketta. Tässä työssä aineisto kerättiin 17 väittämän ChemApproach-kyselylomakkeella. Lomake pohjautuu teoreettisesti edellä mainittuihin kaavakkeisiin, mutta se on suunnattu erityisesti kemian opiskeluun. Kysely-kaavake on validoitu aiemmassa tutkimuksessa (Lastusaari, Laakkonen & Murtonen, 2016). Väittämät on esitetty Taulukossa 1.

Taulukko 1. ChemApproach-lomakkeen väittämät ja niiden jakautuminen ryhmiin.

Subsurf
1) Monet oppimani asiat jäävät irrallisiksi, eivätkä linkity osaksi suurempaa kokonaisuutta.
2) Usein lukiessani luentomateriaalia en ymmärrä mihin uusi asia liittyy.
3) Joudun pänttäämään päähän asioita ilman, että minulla olisi tilaisuutta ymmärtää niitä.
4) Usein en kemian luennolla ymmärrä mihin uusi asia liittyy.
Tecsurf
1) Alleviivaan kirjan tekstiä lukiessani tenttiin
2) Jaan tenttimateriaalin osiin, jotka opettelen tenttiä varten.
3) Lukiessani kemian tenttiin, yritän tehdä kokonaisuuksista yhteenvedon omin sanoin.
4) Teen omia muistiinpanoja, kun luen tenttiin.
5) Jotta oppisin asian paremmin, rakentelen muistisääntöjä.
Actdeep
1) Luennon jälkeen jään usein miettimään opetettuja asioita.
2) Yleensä etsin ja luen kurssiin liittyvää lisämateriaalia.
3) Jään usein pohtimaan tieteellisten tekstien herättämiä ajatuksia ja niiden keskinäi-siä kytkentöjä.
4) Etsin huolellisesti perusteluja ja näyttöä muodostaakseni omat päätelmäni opittavasta asiasta.
Pradeep
1) Harjoitustöitä on mukava tehdä..
2) Olen usein ymmärtänyt kemiallisen asian vasta tehtyäni aiheesta harjoitustyön.
3) Tehdessäni harjoitustyötä yritän yleensä selvittää mihin siihen kuuluvat työvai-heet perustuvat.
4) Kemiallisen ilmiön voi oppia vasta, kun on tehnyt aiheesta kokeellisen työn.

Vastaukset väittämiin kerättiin viiden pisteen Likert-asteikolla (1 = täysin eri mieltä – 5 = täysin samaa mieltä). Väittämissä keskityttiin seuraaviin yleisiin aihepiireihin: valmistautuminen kemian tenttiin, kemian luennot, kemian opiskelutavat ja harjoitustyöt. Väittämien lisäksi kaavake sisältää lisäksi kuusi taustakysymystä (nimi, sukupuoli, pääaine, halukkuus vaihtaa pääainetta, haluttu uusi pääaine ja opiskeluvuosi). Keräys tehtiin harjoitustöiden ja luentojen yhteydessä ja vastaamiseen kului n. 10 min. Tarkoituksena oli saada opiskelijoilta tietoa, jota voisi käyttää hyväksi opetuksen suunnittelussa.

Aineisto kerättiin 94 perusopintovaiheen sekä 40 aineopintovaiheen kemian pääaineopiskelijalta Turun yliopistossa 2013-2015. Kukin opiskelija otti osaa kyselyyn vain kerran, joten vastausten kokonaismäärä oli 134. Näistä 54 % oli naisia ja 46 % miehiä. Kaikkia tuloksia tarkasteltiin suhteessa halukkuuteen vaihtaa pääainetta sekä opintovaiheeseen (perus- tai aineopinnot). Tilastolliset analyysit toteutettiin käyttämällä IBM SPSS Statistics v22 - sekä Mplus-ohjelmia.

TULOKSET

Sopivuus oletettuun faktorirakenteeseen

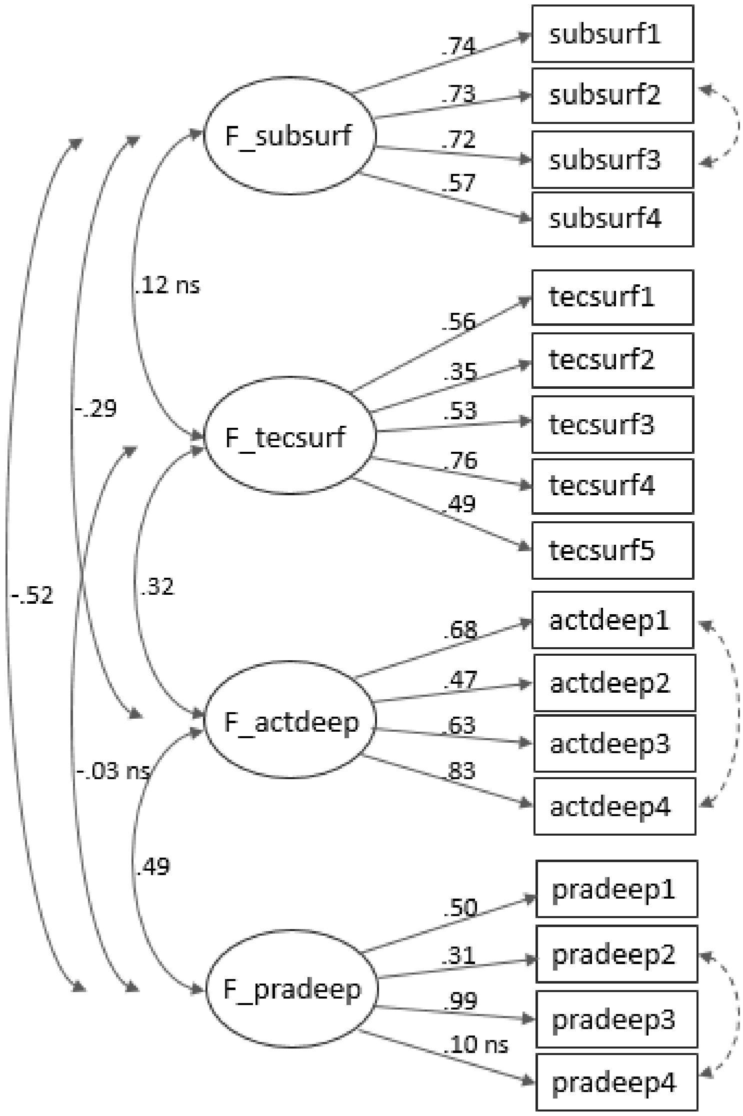
ChemApproach-kaavaketta validoitaessa (Lastusaari, Laakkonen & Murtonen, 2016) on todettu, että väittämät jakaantuvat neljään faktoriin: subsurf (submissive surface learning, eli lannistunut pintaoppiminen), tecsurf (technical surface learning, eli erilaisin pinnallisiin opiskelutekniikoihin keskittyvä oppiminen), actdeep (active deep learning, eli aktiivinen syväoppiminen) ja pradeep (practical deep learning, eli käytäntöä painottava syväsuuntautunut oppiminen). Näitä faktoreita kuvaavat suuntautumistyypit voidaan määritellä seuraavasti: Subsurf-opiskelija yrittää opiskella kemiaa passiivisesti ulkoa lukemalla. Hän ei joko ole kiinnostunut oppimaan tai tekemään työtä oppiakseen, tai hän ei usko omiin kykyihinsä oppia kemiaa. Tecsurf-opiskelija on aktiivisempi: hän opettelee asioita ulkoa käyttämällä aktiivisesti hyväkseen mieleenpainamistekniikoita. Actdeep-opiskelija etsii aktiivisesti opittavaan asiaan liittyvää täydentävää lisämateriaalia ja prosessoi kognitiivisesti asioita muodostaakseen kokonaiskuvan aihepiiristä, eli opiskelee syväsuuntautuneesti. Pradeep-opiskelija on myös syväsuuntautunut. Hän painottaa erityisesti kemian harjoitustöitä keinona oppia ja ymmärtää kemian teoriapohjaa. Myös tässä tutkimuksessa varmistettiin konfirmatorisen faktorianalyysin (CFA) avulla, että kyseinen faktorimalli sopii käsiteltävään aineistoon.

Faktoriratkaisun tulokset osoittavat mallin toimivan, sillä yhteensopivuutta mittaavien indikaattorien CFI ja TLI arvot olivat yli 0,9 ja RMSEA- sekä SRMR-arvot alle 0,08 (Taulukko 2) (Hu & Bentler, 1999; Little, 2010). Analyysin tulosten tarkempi kuvaus on esitetty kuvassa 1. Seuraavaksi muodostettiin summamuuttujat ja laskettiin näihin kuuluvien väittämien sisäistä konsistenssia mittaavat Cronbachin alfan arvot. Myös näissä saatiin hyvät arvot (yli 0,6; taulukko 3), mikä myös vahvisti neljän faktorin mallin olevan toimiva.

Taulukko 2. CFA-mallin sopivuus aineistoon.

Suure	Arvo
Khi² -testi: Arvo	139,95
Vapausasteet	110
P-arvo	0,028
CFI	0,94
TLI	0,92
RMSEA-arvo (90 % CI)	0,05 (0,02; 0,07)
SRMR-arvo	0,08

CFI = Comparative Fit Index; TLI = Tucker-Lewis Index; RMSEA = Root Mean Square Error of Approximation; SRMR = Standardized Root Mean Square Residual



Kuva 1. CFA-mallin estimointitulokset.

Taulukko 3. Summamuuttujien tilastolliset tunnusluvut.

Muuttuja	Väittämien määrä	Keskiarvo	Keskihajonta	Cronbachin α
subsurf	4	2,35	0,67	0.78
tecsurf	5	3,21	0,81	0,67
actdeep	4	2,87	0,77	0,71
pradeep	4	3,23	0,74	0,65

Lähestymistavat oppimiseen perus- ja aineopintovaiheessa

Aluksi tarkasteltiin opiskelijoiden lähestymistapoja opintojen eri vaiheissa. Taulukosta 4 näkyy, että muiden lähestymistapojen yleisyys on samantyyppistä opintojen eri vaiheissa, paitsi käytännöllisen syväoppimisen (pradeep). Tämä on samansuuntainen tulos kuin aiemmassa tutkimuksessamme (Lastusaari & Murtonen, 2013).

Taulukko 4. Keskiarvot, keskihajonnat, ANOVA-tulokset ja Cohenin d-arvot*.

Lähestymistapa	Keskiarvo/keskihajonta		ANOVA			d
			df	F	p	
	Perusopinnot (N = 94)	Aineopinnot (N = 40)				
subsurf	2,33/0,72	2,40/0,52	1, 132	0,29	0,59	0,11
tecsurf	3,21/0,85	3,23/0,70	1, 133	0,01	0,91	0,03
actdeep	2,83/0,78	2,97/0,76	1, 131	0,93	0,34	0,18
pradeep	3,12/0,66	3,50/0,84	1, 132	4,12	0,01	0,53

*Raja-arvot: 0,2 ”pieni”; 0,5 ”keskisuuri”; 0,8 ”suuri”.

Pääaineen vaihtohalukkuus

Koko tutkimukseen vastanneista kemian pääaineopiskelijoista 59 (44 %) halusi vaihtaa pääainetta. Yleisin pääaine, johon haluttiin vaihtaa, oli lääketiede (86 %) ja toiseksi yleisin biokemia (12 %). Perusopintovaiheessa vaihtohalukkaita oli 57 %, kun taas aineopintovaiheen opiskelijoista enää vain viisi halusi vaihtaa pääainetta. Tämä vastaa 13 %, eli aineopintovaiheessa vaihtohalukkuus on laskenut selvästi.

Seuraavaksi tutkittiin pääaineen vaihtohalukkuuden ja lähestymistapojen välistä yhteyttä. Tulosten (taulukko 5) perusteella vaihtohalukkaiden ryhmässä on tilastollisesti merkittävästi enemmän lannistunutta pintasuuntautunutta (subsurf) lähestymistapaa ja vähemmän aktiivista (actdeep) ja käytännöllistä (pradeep) syväsuuntautunutta lähestymistapaa kuin vaihtohaluttomien ryhmässä. Sen sijaan teknistä pintasuuntautunutta (tecsurf) lähestymistapatyyppiä on kummassakin ryhmässä käytännössä yhtä paljon. Koska subsurf kuvaa lannistunutta haluttomuutta kemian opiskelussa ja actdeep sekä pradeep taas täysin päinvastaista lähestymistapaa, osoittavat tulokset, että vaihtohalukkaat eivät ole yhtä syväsuuntautuneita kemian oppimisessaan kuin vaihtohaluttomat. Vaihtohalukkaat ovat ensimmäisen vuoden opiskelijoita ja aineisto on kerätty 1. vuoden syksynä, joten esimerkiksi kiinnostuksen voidaan olettaa vaikuttavan tuloksiin voimakkaasti oppimisen lähestymistavan lisäksi. Täytyy myös ottaa huomioon, että yksikään opiskelija ei noudata puhtaasti yhtä näistä lähestymistavoista, vaan kaikilla on piirteitä useammasta lähestymistavasta.

Taulukko 5. Keskiarvot, keskihajonnat, ANOVA-tulokset ja Cohenin d-arvot*.

Lähestymistapa	Keskiarvo/keskihajonta		ANOVA			d
			df	F	p	
	Haluaa vaihtaa (N = 59)	Ei halua vaihtaa (N = 71)				
subsurf	2,48/0,71	2,22/0,60	1, 128	5,24	0,02	0,40
tecsurf	3,19/0,86	3,26/0,76	1, 129	0,26	0,61	0,09
actdeep	2,71/0,71	2,98/0,80	1, 127	4,13	0,04	0,36
pradeep	3,05/0,67	3,38/0,76	1, 128	6,78	0,01	0,46

*Raja-arvot: 0,2 ”pieni”; 0,5 ”keskisuuri”; 0,8 ”suuri”.

POHDINTAA

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli selvittää, eroavatko Turun yliopistossa kemiaa pääaineenaan opiskelevien opiskelijoiden lähestymistavat oppimiseen sen perusteella haluavatko he vaihtaa pääainetta vai eivät. Aluksi tarkasteltiin opiskelijoiden lähestymistapoja opintovaiheen perusteella. Perus- ja aineopintojen vaiheessa olevien opiskelijoiden välillä löytyi kiinnostava ero lähestymistavoissa: aineopintovaiheessa opiskelevat olivat enemmän käytännöllisesti syväorientoituneita kuin perusopintovaiheen opiskelijat. Jatkossa aineistoa tullaan keräämään samoilta opiskelijoilta useana vuonna. Tällöin saadaan selville onko kemian parissa jatkavilla alusta lähtien enemmän käytännöllistä syväorientoituneisuutta kuin opinnot lopettavilla vai johtuuko nyt havaittu ero esim. opiskelijoiden kehittymisestä opiskelun aikana tai opetuksen rakenteesta.

Pääaineen vaihtohalukkuutta tutkittaessa opiskelijoiden välillä löydettiin monia eroja. Vaihtohalukkaiden ryhmästä löytyi tilastollisesti merkittävästi enemmän lannistunutta pintasuuntautunutta lähestymistapaa ja vähemmän aktiivista ja käytännöllistä syväsuuntautunutta lähestymistapaa kuin vaihtohaluttomien ryhmässä. Sen sijaan teknistä pintasuuntautunutta lähestymistapatyyppiä oli kummassakin ryhmässä käytännössä yhtä paljon. Tulokset siis osoittavat, että vaihtohalukkaat eivät ole yhtä syväsuuntautuneita kemian oppimisessa kuin vaihtohaluttomat. Koska erot keskiarvoissa eivät olleet tilastollisesti merkittävien erojenkaan tapauksissa kuitenkaan kovin suuria (efektikokoa mittaavat Cohenin d-arvot 0,5 tai alle), tuntuu siltä että vaihtohalukkuutta olisi mahdollista vähentää lisäämällä opiskelijoiden syväsuuntautuneisuutta kemiaan. Aiemman tutkimuksen perusteella syväsuuntautunut lähestymistapa on yhteydessä hyvään opintomenestykseen ja sen käyttöä voidaan vahvistaa opetuksessa (esim. Baeten, Kyndt, Struyven & Dochy, 2010; Dolmans, Wolfhagen & Ginns, 2010), joten kemian oppimisen suuntautumistapojen kehittäminen ja sitä kautta kiinnostuksen herättäminen voisi lisätä opinnoissa pysyjien määrää. ChemApproach-kaavake on hyvä työkalu esimerkiksi erilaisten syväsuuntautunutta oppimistapaa edistävien opetuskokeilujen tutkimuksiin jatkossa.

Kiitokset

Kiitämme seuraavia henkilöitä avusta aineiston keruussa: Harri Lönnberg, Helmi Neuvonen, Henri Kivelä ja Tuomas Lönnberg (Turun yliopisto, Kemian laitos). Kiitämme myös Pirjo Vahvialaa and Heidi Salmentoa (Turun yliopisto, Opettajankoulutuslaitos) tulosten käsittelystä.

Lähteet

Baeten, M., Kyndt, E., Struyven, K., & Dochy, F. (2010). Using student-centred learning environments to stimulate deep approaches to learning: Factors encouraging or discouraging their effectiveness. *Educational Research Review, 5*, 243-260.

Biggs, J. (1987). Student approaches to learning and studying. Victoria: Australian Council for Educational Research.

Dolmans, D.H.J.M., Wolfhagen, I.H.A.P., & Ginns, P. (2010). Measuring approaches to learning in a problem based learning context, *International Journal of Medical Education*, *1*, 55-60.

Entwistle, N., & Ramsden, P. (1983). Understanding student learning. London: Croom Helm.

Howie, P. & Bagnall, R. (2013). A critique of the deep and surface approaches learning model, *Teaching in Higher Education*, *18*, 389-400.

Hu, L. & Bentler, P.M. (1999). Cutoff criteria for fit indexes in covariance structure analysis: Conventional criteria versus new alternatives, *Structural Equation Modeling*, *6*, 1-55.

Lastusaari, M., Laakkonen, E., & Murtonen, M. (2016). ChemApproach: Validation of a questionnaire to assess the learning approaches of chemistry students. *Chemistry Education Research and Practice*, DOI: 10.1039/C5RP00216H.

Lastusaari, M., & Murtonen, M. (2013). University chemistry students' learning approaches and willingness to change major. *Chemistry Education Research and Practice, 14*, 496-506.

Lindblom-Ylänne, S., Parpala, A., & Postareff, L. (2014). Challenges in analysing change in students' approaches to learning. In D. Gijbels, V. Donche, J.T.E. Richardson & J.D. Vermunt (Eds.), *Learning Patterns in Higher Education. Dimensions and research perspectives*, s. 232-248. London: Routledge.

Little, T. (2013). *Longitudinal Structural Equation Modeling.*, New York: Guilford Press.

Lonka, K., & Lindblom-Ylänne, S. (1996). Epistemologies, conceptions of learning, and study practices in medicine and psychology, *Higher Education*, *31*, 5-24.

Lovatt, J., Finlayson, O.E., & James, P. (2007). Evaluation of student engagement with two learning supports in the teaching of 1st year undergraduate chemistry, *Chemistry Education Research and Practice*, *8*, 390-402.

Marton, F., & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning – I: outcomes and processes. *British Journal of Educational Psychology, 46*, 4-11.

Nykänen, S.-T. (2013). Kemialla käydään kääntymässä. *Jyväskylän ylioppilaslehti*, 8.5.2013.

Ruuska, M. (2010). Katoamistemppu. *Ylioppilaslehti*, 3.9.2010.

Vermunt, J.D. (1994). *Inventory of learning styles (ILS) in higher education*, Tilburg University,Tilburg, the Netherlands.

Vermunt, J.D., & Vermetten, Y.J. (2004). Patterns in student learning: Relationships between learning strategies, conceptions of learning, and learning orientations. *Educational Psychology Review, 16*, 359-384.

Zeegers, P. (2001). Approaches to learning in science: A longitudinal study, *British Journal of Educational Psychology*, *71*, 115-132.

COMPLEMENTING THE GUIDANCE PROVIDED BY A SIMULATION THROUGH TEACHER QUESTIONING

Antti Lehtinen & Markus Hähkiöniemi

University of Jyväskylä, Department of Teacher Education

The interaction between the teacher and the learners when using simulations is in need of research. This study concentrates on two questioning approaches, series of probing and series of guiding questions that teachers use to guide learning with simulations. These two approaches are contrasted with non-directive and directive guidance provided by the simulation. The data was collected through screen capture videos of pre-service primary teachers teaching physics with a PhET simulation. Two cases were selected for further analysis of teacher questioning and its adaptation to the learners. Even though teachers might use the spaces for explanations created by the simulation to probe for learners' explanations, it is possible that the guidance provided by teachers is still not based on these ideas and explanations.

INTRODUCTION

Computer simulations can be used as a part of inquiry-based science teaching in supporting development of hypotheses, collection of data and revising theory (Rutten, van Joolingen, & van der Veen, 2012). Unguided inquiry-based learning is ineffective while providing guidance e.g. feedback, worked examples or elicited explanations during inquiry learning benefits learners (Alfieri, Brooks, Aldrich, & Tenenbaum, 2011). The need for guidance is even greater with simulations which contain a lot of information that can be hard to perceive (Zacharia et al., 2015). Without proper guidance, the learners have difficulties with generating hypotheses, interpreting data and regulating their inquiry learning with simulations (de Jong & van Joolingen, 1998). Research into the learning support and guidance concerning learning with simulations has been focused on the guidance provided by the simulations themselves and not the role of the teacher (Rutten et al., 2012). This paper studies guidance provided by the teachers during learning with simulations and its interplay with guidance provided by the simulation.

Key factors of successful guidance are the same for teacher-learner interaction and for guidance provided by the simulations: adaptation to the learner, fading out and support for self-regulated learning (de Jong & Lazonder, 2014; van de Pol, Volman, & Beishuizen, 2010). Of these three characteristics, the ability to adapt the guidance to the learners' needs is the focus of this paper. The development of adaptive learning analytical tools which guide learners based on their learning products is still under way (de Jong & Lazonder, 2014). On the other hand, teachers can monitor and probe learners' needs and knowledge through questioning and act upon the information gained (Ruiz-Primo, 2011). Probing questions can be used to e.g. elicit hypotheses from the learners before they start to experiment or encourage learners to reflect on their actions (Chin, 2007). Teachers' questions also can be used to guide learners or ask for factual information (Sahin & Kulm, 2008). Hähkiöniemi (2015) found that pre-service mathematics teachers who asked series of guiding questions directed learners towards an answer through a specific path whereas those who asked series of probing questions elicited learners' thinking and directed them towards forming explanations. These two approaches for questioning bear a resemblance to *directive guidance* and *non-directive guidance* provided by simulations (de Jong & Njoo, 1992). Directive guidance steers the learners into a certain direction through e.g. hints or direct feedback. Non-directive guidance helps learners in completing certain action but doesn't steer them into any direction.

The aim of this paper is to understand how teacher guidance complements the guidance by a simulation by two questioning approaches: one emphasizing probing questions and another emphasizing guiding questions. These approaches are presented through two cases from pre-service teachers who use questions differently in similar teaching situations involving simulations.

METHOD

Data collection

The two case study pre-service teachers were selected among 33 pre-service primary teachers (PSTs) who were participating in a science methods course. The PSTs were assigned to teach an inquiry-based physics lesson (length 45 mins) to which they had to integrate a given PhET simulation. (University of Colorado Boulder, 2016) These lessons were planned and taught in groups of five PSTs to learners from grades 3 to 6. The PSTs and the learners' guardians agreed voluntarily to take part in the research. Lehtinen, Nieminen and Viiri (2016) describes the planning and execution of the lessons. The learners used the simulations in groups of two to five with a PST guiding them. The actions with the simulations and the talk by the learners and the PST were recorded using screen capture software. The data for this paper comes from these recordings.

This paper focuses on teaching physics to learners from grades 5 and 3 with the "Balancing Act" (University of Colorado Boulder, 2016) simulation. This particular simulation was chosen because of the high amount of probing and guiding questions used by the PSTs with this simulation. The excerpts come from the "Game" section of the simulation where the learners were given assignments concerning balancing the seesaw. Before this section they experimented more freely with the simulation.

Data analysis

Teachers' questions were divided into four different categories: probing, guiding, factual and other questions. These categories are based on Sahin and Kulm (2008). The shortened definitions for the categories are as follows:

- Probing questions (code 3): Asking the learners to elaborate and extend their answers. The learners can also be asked about how they would solve the task at hand in a different situation or to make a hypothesis.
- Guiding questions (code 2): Suggesting some procedure for the learners or otherwise aiding in the task at hand with a question. The learners can also be told to pay attention to a particular event in the simulation through questions.
- Factual questions (code 1): Asking for a specific fact, a definition or an answer to an assignment. Series of factual questions are interpreted as guiding if it is clear that the teacher has a guiding aim in mind.
- Other questions (code 0): Asking non-subject related questions e.g. about classroom management.

Teacher utterances were considered questions if they invited the learners to produce an oral response. The question types were coded by author 1 using Atlas.ti video analysis software from the transcribed group activities. Part of the data was also coded by author 2. Inter-rater reliability for a sample of 101 questions (12% of all the questions) was 90% and κ = .832 (95% CI .733 to .931), p < .001. Questioning diagrams were produced in order to study how the questions appeared in series. Similar graphs have been used to study pre-service teachers' questioning in inquiry-based mathematics lessons (Hähkiöniemi, 2015). Transcripts were divided into event segments which were marked by a change in topic, contrast in behavior or transition to the next type of conversation or activity (Jordan & Henderson, 1995). Questions asked in the same event segment are connected by a line in the diagrams.

RESULTS

The cases of two female pre-service teachers (PST A and PST B) are presented. The case of PST A demonstrates how series of probing questions are used to elicit information and to openly invite learners from grade 3 to share their ideas. The case of PST B on the other hand shows how series of guiding questions direct the learners from grade 5 towards an answer via a predetermined learning path. Figure 1 shows the questioning diagrams of PST A and B.

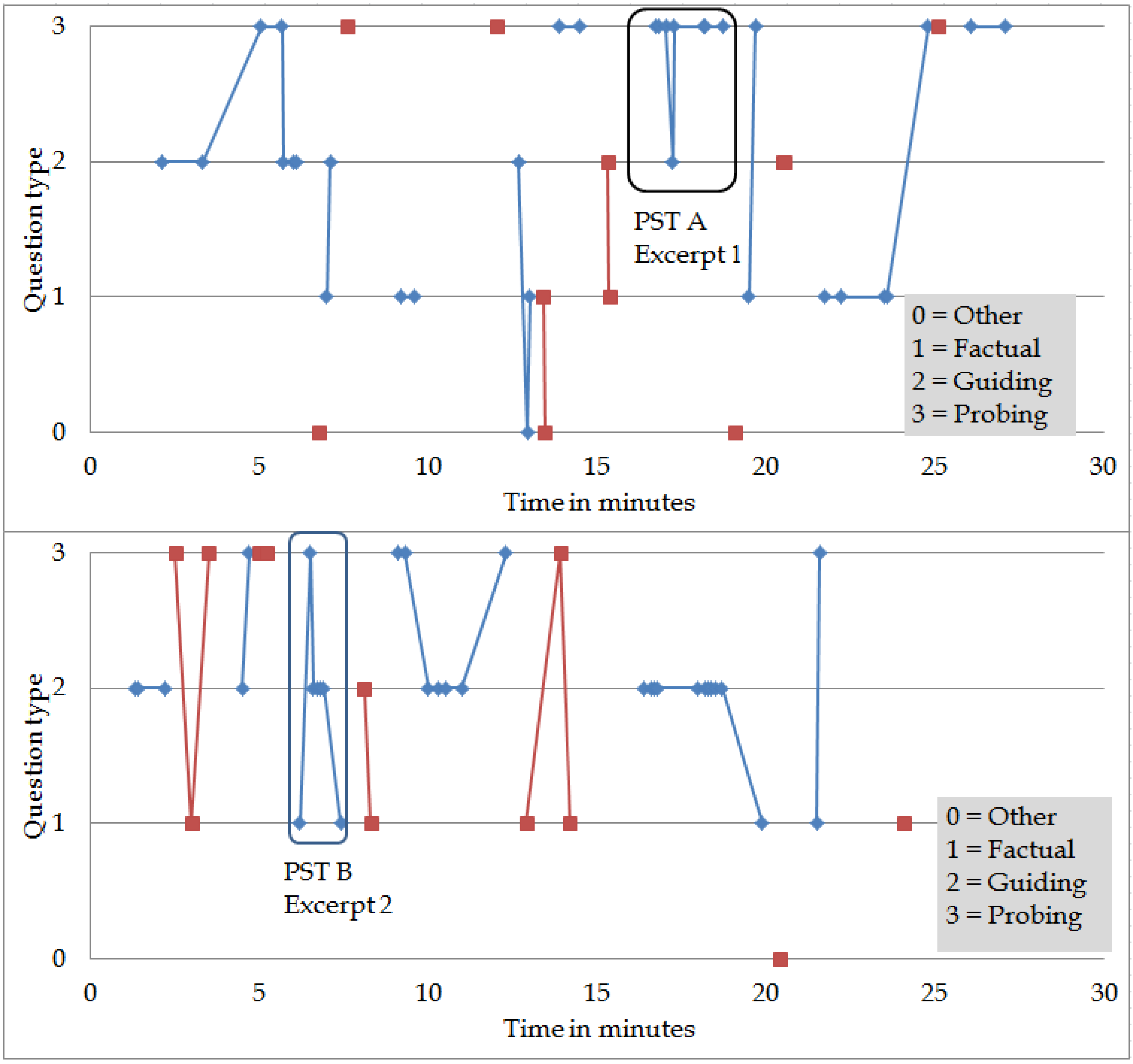


Figure 1. Questioning diagrams for PST A (upper) and PST B (lower). The episodes presented are circled.

Both pre-service teachers asked series of questions including both guiding and probing questions. Yet probing questions were more prevalent in PST A's questioning whereas guiding questions were more common in PST B's questioning. In the following sections we analyze one questioning series from both of the teachers.

The episode of pre-service teacher A – series of probing questions

The assignment asks the learners to find the mass of a trash can which is in a fixed position on the seesaw 1 meter away from the fulcrum. They do this by balancing the seesaw using a brick which weighs 15 kg. The learners have placed the brick 2 meters from the fulcrum and the seesaw has balanced itself.

1	PST A:	OK, now it balanced itself so how can we deduce how much does the trash can weigh? [probing]
2	Learner 1:	It weighs at least more than the other one.

3 PST A: Yes, why does it weigh more? [probing]

4 L 1: Because it's more to that direction.

At the start of the episode the simulation gives the pupils information that the seesaw is balanced but it does not show the masses of the objects. In turns 1 and 3, PST A poses probing questions which request the learners to think about the masses and reasons for them before proceeding to submit the answer. The learners have manipulated the simulation and created an interesting situation and the teacher stops the learners to think. Thus, the interplay of the guidance by the simulation and by the teacher creates a potential place for learner explanation of the phenomena. Indeed the learners articulate the qualitative idea of the relation between the masses and their distances from the fulcrum. After this qualitative idea, PST A starts to draw the learners' attention to the quantities of the masses.

5 PST A: If it was here on the same spot, then what would it weigh? [probing]

6 L 1: 15

7 PST A: That's right. So now that it is half as far as the other one- here is two one and zero- it's on top of the one so how much more should it weigh than 15… its half as far [guiding]

8 L2: Does this weigh 35 kilos?

9 PST A: Why do you think it is 35? [probing]

10 L 1: Yeah right!

11 L 2: I guessed.

12 L 1: I did too.

13 L 2: OK so let's try 35.

(The simulation informs them that their answer is wrong.)

In turn 5, PST A asks learners to hypothesize about the masses in the situation they already know from their previous experiments. This probing question is based on the learners' idea about the distances. PST A also confirms the learners' answer in turn 7. In this case, the guidance by the teacher complements the guidance by the simulation as PST A asks them to think about the simpler situation which draws the learners' attention to what they already know.

After this, in turn 7, PST A turns back to the quantities in the situation at hand in the simulation. Although the teacher is hinting about "half" in turn 7, she is not pressing it much and lets the pupils guess even though they are not able to answer the probing question in turn 9. The pupils submit 35 kg into the simulation and get the feedback that their answer is incorrect. In this case, PST A lets the simulation provide the guidance by giving feedback that the answer is incorrect. After this, the learners start suggesting other values.

14 Learner 3: What about twenty?

15 PST A: So who thinks that why the answer- why do you think so? [probing]

16 L 1: Because well well there goes three and then one.

17 PST A: Hmm so what if the trash can would be on the same line what would it weigh? [probing]

18 L 1 and L 2: 15.

19 PST A: Yeah and now that the trash can is half as far from the fulcrum it is half way-

20 L 1: 30!

21 PST A: Try that.

22 L 2: Are you trying 20?

23 L 1: No but- yeah 20.

(The simulation informs them that their answer is wrong.)

24 L 2: It not that one either- do I have to show the correct answer?

25 L 1: It's 30.

26 PST A: Now you can't try it anymore- here comes the correct answer.

(The simulation informs them that the correct answer is 30 kg.)

In turn 15, PST A again probes for reasons for learners' answers and in turn 17 again directs their thinking towards the simpler situation. Thus, the teacher's guidance complements the guidance by the simulation by adapting to the situation in which the learners should move from guessing to reasoning. In turn 19, PST A hints again about "half" but does not press for it and does not even formulate a question about it. She lets the learners to submit a wrong answer. The discussion continues after the correct answer has been shown.

27 L 1: It would have been 30.

28 PST A: Yeah why was it 30? [probing]

29 L 2: Because 15 is half from 30.

30 PST A: That's right OK the next one.

The simulation reveals the correct answer, but doesn't provide any reasoning for it. PST A complements the guidance provided by the simulation by probing one more time about the reasons and learners explain that the weight is half.

In the episode above, the interplay of the guidance provided by the simulation and by the teacher gets the learners to find the reasoning for their answer. The simulation created a space for explanations and the teacher's probing questions stopped the situation and elicited learners' explanations. The guidance was mainly non-directive basing on learners' own ideas. The dialogue continued based on their answers and the teacher did not steer the learners towards a pre-determined and structured learning path. The most directive guidance happened towards the end of the episode when the teacher hinted about "half" and when the simulation gave the correct answer.

The episode of pre-service teacher B – series of guiding questions

The assignment asks the learners from grade 5 to find a place where a weight of 40 kg balances the seesaw when a weight of 20 kg is fixed 1 m from the fulcrum.

1 PST B: Where should you put the weight of 40 kilos if the weight of 20 kilos is there? [factual]

(The learners discuss where to place weight and move the weight of 40 kilos to the correct position. The simulation informs them that their answer was correct.)

PST B starts the episode with a factual question in turn 1 that is aimed at finding out the answer to the assignment. She doesn't probe the learners for their reasoning before they check their answer. The teacher's question and giving the correct answer make the guidance received thus to be directive i.e. guiding towards an answer.

2 PST B: How did you figure out that you were supposed to put it there? [probing]

3 Learner 4: This is a bit heavier than that- this is 20 kilos heavier.

4 Learner 5: The heavier it is-

5 Learner 6: The more in middle it should be.

In turn 2 PST B probes the learners for their reasoning for their answer. The learners articulate the relation between the masses and their distances from the fulcrum qualitatively as did the learners in the previous episode. Again, an interesting situation has been created through manipulating the simulation and the teacher stops the learners to think. Thus the non-directive guidance provided by PST B complements the guidance provided by the simulation.

6 PST B: Yes, how many times is 40 kilos than 20 kilos? [guiding]

7 Learners: 20.

8 PST B: Yes and how many times? [guiding]

9 Learner 4: Two times.

With guiding questions in turns 6 and 8, PST B guides the learners to think about the relations of the weights. In turn 7 it is clear that the learners are having difficulties in doing so. Their initial qualitative idea is not being taken into account but instead PST B directively guides the learners based on her own strategy.

10 PST B: Yes two times heavier- well how much closer do you have the weight of 40 kilos than the weight of 20 kilos? [guiding]

11 Learner 4: One step.

12 Learner 6: One step closer.

13 PST B: Yeah and if the other one- well how far away is this other one? [guiding]

14 Learner 6: Two steps.

15 PST B: Well and-

16 Learner 5: Three steps all together.

17 PST B: Yes if this is the center of the balancing beam and this weight is one step this way and the other one is two steps that way but what is it… There is the distance but how- if this is two times heavier than that then how many times is this distance longer than that? [factual]

18 Learner 5: One step.

19 PST B: Ok… you can take a look at the next assignment.

In turns 10 and 13 PST B asks guiding questions aimed at finding the distances of the objects from the fulcrum. She is following the same strategy as before by directing the learners towards using the ratios of the weights and their distances from the fulcrum. In turn 17 PST B asks the final factual question about the ratios. When learners still can't give a correct answer PST B simply instructs them to move on in turn 19.

The guidance was mainly directive based on the PST B's own strategy. The dialogue advanced on a path laid out by the teacher which consists of structuring the task with multiple guiding questions. Even though PST B used the space for explanation created by the simulation to ask a probing question, her guidance did not take these explanations into account. Instead she used guiding questions to direct the learners towards using a specific strategy.

DISCUSSION

Both of the episodes discussed show how the simulation created spaces for explanations. PST A used probing questions to elicit these explanations from the learners and mostly non-directively guided them based on their answers.

The teacher's guidance complements the simulation's guidance by using the spaces created by the simulation to provide adaptive, non-directive guidance for the learners. PST B also elicits explanations from the learners but doesn't use these explanations to adapt the guidance. Instead her guidance is based on structuring the task by directive guiding questions that are aimed at making the learners follow a pre-determined learning path. She doesn't deviate from this path even though the learners have difficulties following it.

Questioning diagrams reveal the teachers' emphasis on probing or guiding questions as in Hähkiöniemi's (2015) study. However, the diagrams do not give information about how the questions are adapted to the current situation. For this microanalysis is needed as done in this study. The two episodes show that even though guidance provided by teachers can complement the guidance provided by the simulation by eliciting explanations, the adaptation to the learners' actions is not self-evident. By eliciting the learners' knowledge and ideas through series of probing questions, the teacher gets information about the learners' knowledge and can adapt the guidance. This type of guidance can be compared with non-directive guidance (de Jong & Njoo, 1992) as it supports the learners to come up with their explanations. On the other hand series of guiding questions lead the learners through a pre-determined learning path towards the answer which can be compared with directive guidance by de Jong and Njoo.

Adaptation is an essential concept in describing all kinds of guidance (van de Pol et al., 2010) Use of simulations adds a new dimension to guidance by the teacher as it needs to adapt both to the learners and to the simulation. Through adaptation the teacher acts as orchestrator who chooses when to step in to complement the guidance provided by the simulation or when to step out to let the simulation provide guidance. Even though the simulation itself may provide directive guidance toward the answer the teacher may change the nature of guidance to non-directive. Thus the guidance provided by the teacher and the simulation have synergy with one another by interacting and working in tandem to support learning (Tabak, 2004).

REFERENCES

Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J., & Tenenbaum, H. R. (2011). Does discovery-based instruction enhance learning? *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 1–18.

Chin, C. (2007). Teacher questioning in science classrooms: Approaches that stimulate productive thinking. *Journal of Research in Science Teaching, 44*(6), 815-843.

de Jong, T., & Lazonder, A. W. (2014). The guided discovery learning principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed., pp. 371-390). New York, NY: Cambridge University Press.

de Jong, T., & Njoo, M. (1992). Learning and instruction with computer simulations: Learning processes involved. In E. de Corte, M. C. Linn, H. Mandl & L. Verschaffel (Eds.), *Computer-based learning environments and problem solving* (pp. 411-427). Berlin, Germany: Springer Berlin Heidelberg.

de Jong, T., & van Joolingen, W. (1998). Scientific discovery learning with computer simulations of conceptual domains. *Review of Educational Research, 68*(2), 179-201.

Hähkiöniemi, M. (2015). Using questioning diagrams to study teacher-student interaction. In H. Silfverberg, T. Kärki, & M. S. Hannula (Eds.), Nordic research in mathematics education: Proceedings of NORMA14, Turku, June 3-6, 2014 (pp. 91-100). Turku, Finland: Finnish Research Association for Subject Didactics.

Jordan, B., & Henderson, A. (1995). Interaction analysis: Foundations and practice. *The Journal of the Learning Sciences, 4*(1), 39-103.

Lehtinen, A., Nieminen, P., & Viiri, J. (2016). Preservice teachers' TPACK beliefs and attitudes toward simulations. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 16*(2), 151–171.

Ruiz-Primo, M. A. (2011). Informal formative assessment: The role of instructional dialogues in assessing students' learning. *Studies in Educational Evaluation, 37*(1), 15-24.

Rutten, N., van Joolingen, W., & van der Veen, J. (2012). The learning effects of computer simulations in science education. *Computers & Education, 58*(1), 136-153.

Sahin, A., & Kulm, G. (2008). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(3), 221-241.

Tabak, I. (2004). Synergy: A complement to emerging patterns of distributed scaffolding. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(3), 305-335.

University of Colorado Boulder. (2016). PhET simulations. Retrieved from http://phet.colorado.edu/en/simulations/

van de Pol, J., Volman, M., & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational Psychology Review, 22*(3), 271-296.

Zacharia, Z. C., Manoli, C., Xenofontos, N., de Jong, T., Pedaste, M., van Riesen, S. A., . . . Tsourlidaki, E. (2015). Identifying potential types of guidance for supporting student inquiry when using virtual and remote labs in science: A literature review. *Educational Technology Research and Development, 63*(2), 257-302.

MOODLEN TYÖPAJA – VERTAISARVIOINTI OSANA OPETUSTA YLIOPISTOMATEMATIIKAN ENSIMMÄISELLÄ PERUSKURSSILLA

Ari-Mikko Mäkelä, Simo Ali-Löytty, Jorma Joutsenlahti & Janne Kauhanen
Tampereen teknillinen yliopisto

Tässä tutkimuksessa selvitettiin ensimmäisen vuoden matematiikan opiskelijoiden (N = 129) kokemuksia ja mielipiteitä vertaisarvioinnista osana matematiikan opetusta. Vertaisarviointia tehtiin Moodlen Työpaja-aktiviteetin avulla. Kullakin harjoitusviikolla tuli palauttaa yksi vertaisarvioitava tehtävä ja palautuksen määräajan jälkeen opiskelijat saivat vertaisarvioitavakseen kahden kanssaopiskelijan samasta tehtävästä tehdyn ratkaisun. Vertaisarvioijan tehtävänä oli antaa tehtävistä numeroarvosana sekä perustelut arvosanalle. Arvioinnit tehtiin anonyymisti. Tulosten perusteella vertaisarvioinnin laatiminen tukee oppimista, mutta palautteen saaminen ei juurikaan. Lisäksi havaittiin, että erityisesti pintasuuntautuneet mallista oppijat, jotka eivät halua opiskella matematiikkaa kovin syvällisesti, kokivat hyötyvänsä vertaisarviointimenettelystä.

JOHDANTO

Uusikylän ja Atjosen (2007) mukaan arviointi on tärkeä osa opetusta ja oppimista. Arvioinnin ei pitäisi olla muusta pedagogisesta toiminnasta irrallista, vaan sen tulisi olla aidosti osa oppimisprosessia. Perinteisesti arviointia on tehnyt opettaja, mutta myös opiskelijoiden arviointitaitoja ja palautteenantokykyä on mahdollista kehittää antamalla heille mahdollisuus osallistua arviointiin. Siinä missä opiskelija luottaa opettajan antamaan arviointiin suhteellisen kritiikittömästi, saattaa opiskelijoiden välisessä arvioinnissa muodostua tilanne, jossa jostakin asiasta ollaan eri mieltä. Tämä voi johtaa opiskelijan kriittisempään ajatteluun (Sims, 1989).

Racen, Brownin ja Smithin (2005) mukaan mikään ei vaikuta opiskelijoiden opiskelumotivaatioon ja –tapoihin niin kuin arviointi, vaikka he ovatkin yleensä tietämättömiä opettajien arvostelumetodeista. Vertaisarviointi tutustuttaa opiskelijat arviointiin ja lisää ymmärrystä arviointiprosessista (Hyppönen & Linden, 2009). Arviointiprosessista tulee läpinäkyvää ja samalla opiskelijat oppivat, mikä tehtävässä tai työssä on tärkeää. Vertaisarvioinnin avulla opiskelijat ymmärtävät, mitä heiltä vaaditaan ja mitä heidän tulisi oppia (Race ym., 2005).

Opiskelijoiden välinen vertaisarviointi on vastavuoroisuuteen perustuvaa arviointia. Opiskelijat tekevät tehtäviä ja arvioivat toistensa tuotoksia. Esimerkiksi matematiikan tehtäviä vertaisarvioidessaan opiskelija näkee erilaisia tapoja ratkaista tehtävä (Havola, Majander, Hakula, Alestalo & Rasila, 2011). Vertaisarviointia tehdessään opiskelijan tulee tietää arviointikriteerit voidakseen tehdä arviointia onnistuneesti. Nähdessään malliratkaisun ja arvioidessaan toisen opiskelijan tekemää tehtävää opiskelija pääsee kertaamaan oppimaansa ja oppii myös mahdollisesti uutta. Vaikka opiskelijat ovatkin aktiivisia toimijoita, ei opettajakaan voi siten jäädä vertaisarviointiprosessissa toimettomaksi, vaan opettajan tulee ohjata ja ohjeistaa opiskelijoita riittävästi arvioinnin laatimisessa (Uusikylä & Atjonen, 2007).

Race ym. (2005) näkevät useita perusteltuja syitä käyttää vertaisarviointia opetusmetodina. Ensinnäkin vertaisarviointia tehdessään opiskelijat oppivat syvemmin opittavan asian, sillä annettujen arviointikriteerien soveltaminen kanssaopiskelijan työhön on yksi tuottavimmista tavoista kehittää ja syventää omaa ymmärrystä opittavaan asiaan. Arvion laatiminen on huomattavasti täsmällisempi ja vaativampi prosessi kuin pelkkä työn lukeminen tai kuunteleminen. Toisaalta vertaisarvioinnin avulla opiskelijat oppivat toistensa onnistumisista. Opiskelijat useimmiten tunnistavat, milloin toinen on tehnyt tehtävän paremmin. Vertaisarvioija huomaa myös herkemmin tehtävässä tehdyt virheet kuin tehtävän tekijä.

Vertaisarvioinnin vaikutusta oppimistuloksiin on tutkittu eri oppiaineissa ja sitä on tutkittu sekä luokkahuoneessa että verkossakin tapahtuvana oppimistapahtumana. Aiemmissa tutkimuksissa vertaisarviointimenettelystä on saatu erilaisia tuloksia riippuen kontekstista, jossa sitä on kokeiltu. Esimerkiksi Crowen, Silvan ja Ceresolan (2015) tutkimuksen mukaan luokkahuoneessa tapahtuvalla vertaisarvioinnilla ei ollut kvantitatiivisiin tutkimusmenetelmiin liittyvällä kurssilla oppimistuloksiin parantavaa vaikutusta. Joidenkin tutkimusten (katso esim. Rourke, Mendelssohn, Coleman & Allen, 2008; Gehringer, 2001) valossa varsinkin verkossa tapahtuvan vertaisarvioinnin on puolestaan havaittu tukevan oppimisprosessia mainiosti. Aalto-yliopistossa tehdyn tutkimuksen (Havola, L. ym., 2011) mukaan opiskelijat kokivat vertaisarviointimenettelyn miellyttävänä. Esimerkiksi mahdollisuus nähdä erilaisia ratkaisutapoja tehtäviin nähtiin vertaisarvioinnissa positiivisena.

Tämän tutkimuksen oli tarkoitus selvittää, miten ensimmäisen vuoden opiskelijat kokevat vertaisarvioinnin oppimiskeinona yliopiston matematiikan peruskurssilla. Erityisen kiinnostuneita oltiin siitä, pohtivatko opiskelijat tehtäviä vertaisarvioinnin ansiosta syvällisemmin ja kokevatko opiskelijat vertaisarviointiprosessin siten edesauttavan matematiikan oppimista paremmin verrattuna perinteiseen tapaan ratkaista tehtäviä. Lisäksi tarkasteltiin erilaisten oppijoiden mielipiteiden välisiä eroavaisuuksia.

TUTKIMUSMENETELMÄT

Tutkimuksen toteutus

Tutkimukseen liittyvä vertaisarviointikokeilu toteutettiin syksyllä 2015 Tampereen teknillisen yliopiston Matematiikka 1–opintojaksolla, joka on suunnattu luonnontieteellisen tiedekunnan ensimmäisen vuoden opiskelijoille. Opintojakson viikoittaiset laskuharjoitukset koostuivat Moodlessa tehtävistä automaattisesti tarkistettavista *STACK*-harjoituksista, yhdestä Moodleen palautettavasta vertaisarvioitavasta *Työpajatehtävästä* sekä kolmesta perinteisestä laskuharjoituksissa paikan päällä ratkaistavista tehtävistä. STACK-harjoitukset olivat Moodlessa tehtäviä laskuharjoituksia, joihin ohjelma antaa automaattisen palautteen opiskelijan vastauksen perusteella. STACK-tehtävissä parametreja voi myös satunnaistaa, joten vaikka tehtävät ovatkin kaikilla opiskelijoilla lähes samanlaisia, ei vastauksia voi suoraan kopioida kaverilta.

Vertaisarvioitavat tehtävät palautettiin Työpajaan, joka on Moodlen oma vertaisarviointiin tarkoitettu aktiviteetti. Sen ansiosta suurellekin määrälle opiskelijoita voidaan jakaa nopeasti ja vaivattomasti tehtäviä vertaisarvioitavaksi anonyymisti. Työpajassa opiskelijat työskentelevät opettajan määrittelemän aikataulun mukaisesti. Ensin opiskelijat ratkaisivat tehtävän ja palauttivat sen kunkin harjoitusviikon sunnuntai-iltaan mennessä Työpajaan. Toisessa vaiheessa opiskelijat saivat kaksi tehtävää vertaisarvioitavakseen. Vertaisarviointi tehtiin niin ikään Moodlessa ja sen määräaika oli seuraavan viikon sunnuntai. Työpajan sulkeuduttua opiskelijat näkivät vertaisiltaan saadut arvosanat sekä opettajan kaikille opiskelijoille yhteisesti suunnatun yhteenvedon Työpajatyöskentelystä.

Työpajatehtävät ja niiden vertaisarviointiin liittyvät ohjeet käytiin läpi laskuharjoituksissa tehtävän palautuksen määräajan jälkeisellä viikolla. Mallivastaus ja arviointiohjeet olivat opiskelijoiden saatavilla myös Moodlessa.

Aineiston kerääminen

Matematiikka 1–opintojaksolla oli yhteensä kuusi Työpajatehtävää vertaisarviointeineen. Työpajatehtävien aiheina olivat muun muassa induktiotodistus, kompleksiluvun juurien hakeminen sekä funktion raja-arvon todistaminen. Opintojakson lopuksi viimeisissä laskuharjoituksissa opiskelijoille järjestettiin vertaisarviointia koskeva mielipidekysely. Kysely toteutettiin paperisena lomakkeena, johon opiskelijat vastasivat harjoitusten aikana. Kysely koostui 13:sta Työpajatehtäviin liittyvästä Likert-väittämästä sekä kolmesta avoimesta kysymyksestä.

Tutkimuksessa tarkasteltiin myös erityylisten oppijoiden kokemuksia vertaisarvioinnista. Opiskelijoiden *oppimisprofiilit* saatiin perustaitojen testistä, joka järjestetään TTY:llä opintojen alussa. Testin aluksi opiskelijat vastaavat matematiikan oppimista koskevaan kysymykseen, jossa heitä pyydetään valitsemaan yksi viidestä heitä parhaiten kuvaavasta vaihtoehdosta. Opiskelijoiden oppimisprofiilit määritetään tämän kysymyksen avulla. Oppimisprofiilit ovat: 1) *pintasuuntautuneet mallista oppijat*, 2) *vertaisoppijat*, jotka opiskelevat mielellään ryhmissä, 3) *tukea tarvitsevat*, 4) *omin päin opiskelevat* sekä 5) *osaajat*, jotka kokevat olevansa hyviä matematiikassa ja haluavat oppia sitä syvällisesti. Profiileja on eritelty tarkemmin TTY:n tutkimusraportissa (Pohjolainen, Raassina, Silius, Huikkola & Turunen, 2006).

Aineiston analyysi

Opiskelijakyselyn tuloksia analysoitiin Likert-väittämien osalta kvantitatiivisen ja kolmen avoimen kysymyksen osalta kvalitatiivisen analyysin keinoin. Ensin tarkasteltiin yleisiä tuloksia kaikkien kyselyyn vastanneiden osalta. Tämän jälkeen vastaajat jaoteltiin oppimisprofiilien mukaan ja tarkasteltiin, erosivatko tiettyyn profiiliin kuuluneiden opiskelijoiden mielipiteet muiden opiskelijoiden mielipiteistä merkitsevästi. Profiilivertailussa vaihtoehdot ”täysin / osittain eri mieltä” yhdistettiin vaihtoehdoksi ”eri mieltä” ja vastaavasti ”täysin / osittain samaa mieltä” yhdistettiin vaihtoehdoksi ”samaa mieltä”. Tämä tehtiin χ^2-testin vaatimusten vuoksi – näin saatiin kolmen suurimman profiilin osalta riittävästi frekvenssejä kumpaankin vastausvaihtoehtoon.

Opiskelijakyselyn avointen kysymysten tarkoituksena oli tiedustella opiskelijoiden mielipiteitä Työpajatyöskentelyn hyvistä ja huonoista puolista sekä kartoittaa opiskelijoiden kokonaisvaltaista suhtautumista Työpajatehtäviin ja vertaisarviointimenettelyyn. Näillä haluttiin selvittää, millaiset teemat nousevat opiskelijoiden vastauksissa eniten esille ja onko suhtautuminen vertaisarviointiin yleisesti positiivinen, neutraali vai negatiivinen.

TULOKSET

Yleisiä tuloksia

Opiskelijakyselyn 13 Likert-väittämää ja kaikkien opiskelijoiden vastausten jakautuminen väittämissä löytyy tämän artikkelin liitteistä (Taulukko 4).

Väittämän 5 tulosten perusteella opiskelijat vaikuttavat pohtivan vertaisarvioitavia tehtäviä normaalia enemmän. Opiskelijoiden mielipiteet Työpajatyöskentelystä kokonaisuudessaan oppimisen näkökulmasta puolestaan vaihtelivat suuresti. Hieman yli puolet vastaajista koki Työpajatyöskentelyn edesauttavan oppimista paremmin kuin perinteiset harjoituksissa tarkastettavat tehtävät (väittämä 7).

Opiskelijat oppivat paremmin tehdessään itse vertaisarviointia kuin saamansa vertaisarvioinnin avulla. Tämä johtopäätös voidaan tehdä tarkastelemalla kyselyn ensimmäisen ja toisen väittämän tuloksia. 63,7 % opiskelijoista oli väittämän 1 kanssa joko osittain tai täysin samaa mieltä. 69,3 % opiskelijoista puolestaan oli väittämän 2 kanssa joko osittain tai täysin eri mieltä. Saatu sanallinen arviointi ei juurikaan edesauttanut oppimista, sillä opiskelijatoverien arviointikykyyn ei varsinkaan haastavissa tehtävissä luotettu. Tämä käy ilmi kyselyn avointen kysymysten vastauksista. Lisäksi 52,0 % vastaajista (N

= 100) oli sitä mieltä, että tehtävistä ei saatu riittävästi sanallista palautetta (väittämä 3).

Profiilikohtaisia tuloksia

Profiilikohtaista vertailua tehtiin vertaamalla kolmen oppimisprofiilin (pintasuuntautuneet mallista oppijat, vertaisoppijat ja osaajat) vastauksia muiden opiskelijoiden vastauksiin. Tukea tarvitsevia (N = 4) ja omin päin opiskelevia (N = 6) oli kyselyyn vastanneiden joukossa niin vähän, että näitä kahta profiilia ei erikseen tarkasteltu.

Tutkimuksessa havaittiin erityisesti pintasuuntautuneiden mallista oppijoiden (N = 17) vastausten eroavan muiden opiskelijoiden vastauksista. Pintasuuntautuneet mallista oppijat oppivat matematiikkaa esimerkkien avulla – heidän kiinnostukseensa matematiikkaa kohtaan vaikuttaa enemmän koulutusohjelma kuin oma mielenkiinto. Tämän profiilin opiskelijoilla korostuu epävarmuus oman osaamisen suhteen. Heidän asenteensa oppimista kohtaan ei ole kaikkein positiivisin ja oppiminen on pinnallista. Mallista oppijat onnistuvat tehtävän ratkaisemisessa katsomalla mallia opettajan esimerkeistä (Pohjolainen & al. 2006).

Tilastollisesti merkitsevimmät erot havaittiin väittämissä 1 ja 6 (Taulukko 1). Valtaosa tämän profiilin opiskelijoista koki oppivansa vertaisarvioinnin laatimisen ansiosta kurssin teemoja normaalia paremmin. Muiden opiskelijoiden vastaukset jakautuivat puolestaan paljon tasaisemmin. Saatu vertaisarviointi sai pintasuuntautuneet oppijat myös suhtautumaan omiin vastauksiin kriittisesti (väittämä 6). Myös tässä väittämässä on tilastollisesti merkitsevä ero, kun verrataan muiden opiskelijoiden vastauksiin (p = 0,006).

Taulukko 1: Pintasuuntautuneiden mallista oppijoiden vastausten vertailua muihin opiskelijoihin.

Väittämä	Pintasuuntautuneet mallista oppijat		Muut		
	Eri mieltä	Samaa mieltä	Eri mieltä	Samaa mieltä	p
1	2 (11,7 %)	15 (88,3 %)	40 (48,2 %)	43 (51,8 %)	0,006
6	3 (17,6 %)	14 (82,4 %)	44 (54,3 %)	37 (45,7 %)	0,006
7	12 (70,6 %)	5 (29,4 %)	44 (53,7 %)	38 (46,3 %)	0,200

Väittämien 1 ja 6 tulosten perusteella ei ole yllättävää, että selvä enemmistö pintasuuntautuneista mallista oppijoista koki Työpajatyöskentelyn edesauttavan matematiikan oppimista. Tämä käy ilmi tarkastelemalla väittämän 7 tuloksia. Ero muihin opiskelijoihin ei tässä väittämässä kuitenkaan ole tilastollisesti merkitsevä (p = 0,200) vaikka muiden opiskelijoiden vastaukset jakautuivat siinäkin tasaisemmin.

Osaajien (N = 38) mielipiteet vertaisarvioinnin vaikutuksesta oppimiseen eivät eronneet merkitsevästi muiden oppimisprofiilien opiskelijoiden mielipiteisiin verrattuna. Osaajat eivät nähneet vertaisarviointimenettelyä niin paljon oppimistaan edistävänä kuin pintasuuntautuneet mallista oppijat. Vertaisarviointia ei heidän osaltaan tosin tyrmättykään – esimerkiksi väittämän 7 (katso Taulukko 4) kohdalla osaajien mielipiteet jakautuivat kaksiportaiseksi tiivistetyssä asteikossa täsmälleen tasan.

Myös vertaisoppijoiden (N = 33) vastaukset jakautuivat useimmissa väittämissä samansuuntaisesti kuin muillakin opiskelijoilla. Ainoastaan väittämän 6 (”Saamani vertaisarviointi sai minut suhtautumaan kriittisesti myös omiin ratkaisuihini.”) kohdalla havaittiin selvä ero muihin vastaajiin: ainoastaan 32,5 % vertaisoppijoista oli tämän väittämän kanssa samaa mieltä, kun muista vastaajista samaa mieltä oli 61,2 % (p = 0,008).

Laadullinen analyysi

Opiskelijoiden sanallisten arviointien laatua vertaisarvioinneissa arvioitiin opettajan toimesta opintojakson neljännessä Työpajatehtävässä. Opettaja arvioi kaikkien opiskelijoiden arvioinnit asteikolla 0-5, missä 0 vastasi arviointia, jossa ei ollut sanallista palautetta ollenkaan ja numeron 5 puolestaan sai, jos palaute oli täsmällinen ja noudatti kiitettävästi arviointiohjeita. Tässä tarkastelussa sanallisten arviointien laatu havaittiin heikoksi – ainoastaan 12,5 % opiskelijoista (N = 96) sai arvion 4 tai paremman. Näitä arviointeja verrattiin myös opiskelijoiden opintojakson tentissä saamiin arvosanoihin. Näiden välillä havaittiin kohtalainen korrelaatio (r = 0,365, p = 0,000). Hyvin sanallisen arvioinnin kirjoittaneet menestyivät hyvin myös tentissä. Välttävästi sanallisen arvioinnin tehneiden tenttiarvosanat vaihtelivat enemmän. Kuitenkin tentissä esimerkiksi arvosanan 0 saaneista suurin osa oli tehnyt myös vertaisarvioinnin heikosti.

Kyselyn viimeisen kysymyksen (Kysymys 16: ”Kerro vielä mielipiteesi Moodlen Työpajasta ja vertaisarvioinnista kokonaisuudessaan.”, N = 99.) perusteella tulkittiin opiskelijoiden suhtautuminen Työpaja-konseptiin ja vertaisarviointiin. 42 vastauksessa (42,4 %) Työpajaan suhtauduttiin ilmeisen positiivisesti. Neutraalisti suhtautuneita oli lähes yhtä paljon, 36 opiskelijaa (36,4 %). Vain hieman yli viidennes opiskelijoista (N = 21; 21,2 %) suhtautui Työpajaan selvästi negatiivisesti. Alla on yksi tyypillinen opiskelijan mielipide Työpaja-työskentelystä .

> Työpajat ovat ihan ok vaihtelua perinteisiin tehtäviin. Vertaisarviointi oli välillä vaikeaa, kun ei itse tiennyt saiko tehtävää ratkaista tietyllä tyylillä. (Opiskelija 1)

Opiskelijakyselyn ensimmäisessä avoimessa kysymyksessä tiedusteltiin Työpajatyöskentelyn positiivisia seikkoja. Opiskelijoiden vastauksissa kolme eniten esiintynyttä teemaa on koottu Taulukkoon 2.

Selvästi eniten opiskelijoiden vastauksissa toistui tehtävien pohtiminen. Opiskelijoiden mielestä vertaisarvioitaviin tehtäviin tuli syventyä tarkemmin ennen kaikkea riittävän hyvän vertaisarvioinnin laatimiseksi. Tämän ansioista monet käyttivät tehtävän parissa enemmän aikaa ja kokivat oppivansa tehtävissä olleita aiheita paremmin.

> Työpajatehtävät pakottivat minut opiskelemaan asiaa paremmin. Vertaisarviointi myös pakotti ymmärtämään tehtävän / asian paremmin, jotta pystyin arvioimaan tehtävän. (Opiskelija 2)

Taulukko 2: Kolme eniten esiintynyttä teemaa opiskelijoiden vastauksissa kysyttäessä Työpajatyöskentelyn hyviä puolia. (Kysymys 14: ”Mitä hyvää Työpajatyöskentelyssä mielestäsi oli?”). N = 102.

Teema	f (%)
1. Tehtäviä oli pohdittava tarkemmin, jotta ne osasi arvioida.	28 (27,5 %)
2. Muiden tekemistä hyvistä ratkaisuista ja virheistä oppi.	16 (15,7 %)
3. Pakotti huolellisuuteen.	15 (14,7 %)
Muut	43 (42,1 %)

Monet oppivat myös nähtyään toisten opiskelijoiden tekemiä ratkaisuja. Opiskelijat havaitsivat uusia ratkaisutapoja tehtävissä. Jotkut huomasivat paremmin myös omat virheensä toisten ratkaisuja tarkastellessaan. Vertaisarviointimenettelyn pakotti myös osan vastaajista ratkaisemaan tehtävät vaihe vaiheelta huolellisemmin.

> Tehtävää tehdessä tuli kiinnitettyä enemmän huomiota sanallisiin selityksiin ja välivaiheiden selkeyteen. (Opiskelija 3)

Muut teemat sisältävät vähemmän mainittujen seikkojen lisäksi myös tyhjät vastaukset tähän kysymykseen. Vastauksissa mainittiin myös mallivastaukset ja arviointiohjeet Työpajan parhaimpana antina.

Taulukkoon 3 on kerätty vastauksissa useimmin esiintyneet teemat kysymykseen 15, jossa kysyttiin Työpajassa ilmenneitä negatiivisia puolia. Näissä vastauksissa erottui selvästi neljä teemaa. Muut vastaukset olivat pääosin joko tyhjiä tai eivät liittyneet Työpajaan, vaan opintojakson muihin järjestelyihin.

Taulukko 3: Useimmin esiintyneet teemat opiskelijoiden vastauksissa Työpajan huonoja puolia kysyttäessä. (Kysymys 15: ”Mitä huonoa Työpajatyöskentelyssä mielestäsi oli?”). N = 102.

Teema	f (%)
1. Vertaisarvioinnit virheellisiä tai puutteellisia.	21 (20,6 %)
2. Arviointi haastavaa, jos ei itse osannut tehtävää.	21 (20,6 %)
3. Työläitä ja aikaa vieviä.	17 (16,7 %)
4. Sekava järjestely.	15 (14,7 %)
Muut	28 (27,5 %)

Eniten vastauksissa esiintyi kritiikkiä saatuja vertaisarviointeja kohtaan. Monen opiskelijan mielestä saadut sanalliset palautteet olivat kovin lyhyitä tai ne olivat virheellisiä eivätkä noudattaneet arviointiohjeita. Samasta tehtävästä saattoi eri opiskelijoilta saada aivan erilaisen arvostelun. Osa opiskelijoista ei ollut saanut sanallista palautetta ollenkaan. Arviointien heikko laatu liittyy toiseen vastauksissa usein esiintyneeseen teemaan. Moni koki arvioinnin liian haastavaksi varsinkin, jos tehtävää ei ollut itse osannut ratkaista, mallivastauksesta ja arviointiohjeista huolimatta. Tosin monesti tehtävät saattoi ratkaista eri tavalla kuin mallivastauksessa oli esitetty – erityisesti tällöin opiskelijat kokivat vertaisarvioinnin vaikeaksi.

Osa vastaajista koki Työpajatyöskentelyn työlääksi. Tämä ei johtunut niinkään itse tehtävistä tai vertaisarvioinnin laatimisesta, vaan tehtävien konvertoimisesta PDF-tiedostoksi, mikä ärsytti osaa opiskelijoista. Työpajan väljä aikataulu sai myös nuhteita. Opiskelijat eivät enää jaksaneet palata vanhoihin tehtäviin lukemaan saamaansa vertaisarviointia, kun palaute tuli vasta silloin, kun luennoilla oli jo siirrytty uuteen asiaan.

POHDINTA

Opiskelijakyselyn perusteella ensimmäisen vuoden opiskelijat suhtautuvat Moodlen Työpajassa tapahtuvaan vertaisarviointiprosessiin vaihtelevasti. Osalle opiskelijoista vertaisarviointi sopii ja sen koetaan edesauttavan oppimista. Vastaavasti osa opiskelijoista ei mielestään juurikaan hyötynyt Työpajatyöskentelystä. Positiivisesti käytettyyn vertaisarviointimenettelyyn suhtautuneita oli vain kaksinkertainen määrä negatiivisesti suhtautuneihin nähden. Positiivisimmin Työpajatyöskentelyyn suhtautuivat pintasuuntautuneet mallista oppijat. Heistä 70,6 % koki vertaisarviointimenettelyn edesauttavan oppimista. Muiden oppimisprofiilien edustajien mielipiteet jakautuivat tasaisemmin, mutta mikään profiili ei kuitenkaan erottunut negatiivisella suhtautumisella.

Opiskelijoiden mielestä erityisesti vertaisarvioinnin laatiminen edistää oppimista, saatu arviointi ei niinkään. Vertaisarvioidessa tehtäviin paneudutaan tavallista huolellisemmin ja syvällisemmin. Opiskelijat kokivat, että ratkaisuja arvioidessa tulee pohtia ja perustella itselleen, onko arvioitavan ratkaisu oikein vai ei. Tämä koettiin oppimisen kannalta hedelmälliseksi, joten voidaan olettaa, että pelkkä mallivastausten ja pisteytysohjeiden analysoiminen ilman vertaisarviointia ei tuottaisi yhtä hyviä oppimistuloksia. Hyvin sanallisen vertaisarvioinnin tehneet menestyivät keskimäärin hyvin myös tentissä. Monille vertaisarvioinnin laatiminen oli kuitenkin hankalaa, mistä johtuen opiskelijoiden toisiltaan saamien sanallisten arviointien laatu oli pääosin kehnoa. Erityisesti tästä johtuen saadusta palautteesta ei saatu sitä hyötyä, joka siitä parhaimmillaan voitaisiin saada.

Vertaisarviointikokeilun voidaan sanoa onnistuneen, sillä merkittävä osa opiskelijoista koki sen positiivisena (42,4 % vastaajista) ja myös oppimista edesauttavana (53,5 %). Potentiaalia vertaisarvioinnissa matematiikan oppimisen näkökulmasta siis on. Työpajatyöskentelyssä on jatkoa ajatellen kuitenkin paljon kehitettävää. Muun muassa Työpajan aikataulua tulee pohtia jatkossa tarkemmin. Esimerkiksi Havolan ym. (2011) tutkimukseen liittyvässä opetuskokeilussa opiskelijat antoivat kiitosta juuri siitä, että ratkaisuista sai välittömästi palautetta, kun tehtävä oli vielä tuoreessa muistissa. Suurin kysymys kuitenkin on, miten opiskelijat saadaan laatimaan laadukkaampia sanallisia arviointeja. Tässä suhteessa opettajilla on suuri vastuu. Vaikka tehtävät ja arviointiohjeet käytiin melko perusteellisesti laskuharjoituksissa läpi, on varsinkin mallivastauksen laatimisessa parannettavaa. Jos ratkaisutapoja on useita, on myös mallivastauksia syytä laatia useita versioita. Tällöin opiskelijoiden arviointityö helpottuu.

LÄHTEET

Crowe, J.A., Silva, T., Ceresola, R. (2015). The Effect of Peer Review on Student Learning Outcomes in a Research Methods Course. *Teaching Sociology 43(3), 201-213.* http://www.asanet.org/journals/TS/Jul15TSFeature.pdf [Luettu: 12.11.2015]

Gehringer, E.F. (2001). Electronic Peer Review and Peer Grading in Computer-Science Courses. Teoksessa *Proceedings of the thirty-second SIGCSE technical symposium on Computer Science Education* (s. 139-143). New York, USA: ACM. http://dl.acm.org/citation.cfm?id=364564 [Luettu: 12.11.2015]

Havola, L., Majander, H., Hakula, H., Alestalo, P., Rasila, A. (2011). Aktivoiviin opetusmenetelmiin perustuvat matematiikan opetuskokeilut Aalto-yliopistossa. Teoksessa J. Viteli & A. Östman (toim.) *Interaktiivinen tekniikka koulutuksessa 2011–konferenssi* (s. 5-9). Tampere, Suomi: Tampereen yliopisto.

Hyppönen, O. & Linden, S. (2009) Opettajan käsikirja – opintojaksojen rakenteet, opetusmenetelmät ja arviointi. Espoo, Suomi: Teknillinen korkeakoulu.

Race, P., Brown, S., Smith, B. (2005) 500 Tips On Assessment. Abingdon, Englanti: Routledge Falmer.

Rourke, A.J., Mendelssohn, J., Coleman K. & Allen, B. (2008). Did I mention it's anonymous? The triumphs and pitfalls of online peer review. Teoksessa *Hello! Where are you in the landscape of educational technology? Proceedings ascilite Melbourne 2008* (s. 830-840). Melbourne, Australia. http://www.ascilite.org.au/conferences/melbourne08/procs/rourke.pdf [Luettu: 11.11.2015]

Sims, G. (1989). Student peer review in the classroom: A teaching and grading tool. Teoksessa *Journal of Agronomic Education 18 (s. 105-108).*

https://www.agronomy.org/files/publications/jnrlse/pdfs/jnr018/018-02-0105.pdf [Luettu 11.11.2015]

Pohjolainen, S., Raassina, H., Silius, K., Huikkola, M. & Turunen, E. 2006. TTY:n insinöörimatematiikan opiskelijoiden asenteet, taidot ja opetuksen kehittäminen. Tampereen teknillinen yliopisto. Tampere, Suomi.

Uusikylä, K., & Atjonen, P. (2007) Didaktiikan perusteet. 3. painos. Helsinki, Suomi: Sanoma Pro.

LIITTEET

Taulukko 4. Kyselyn väittämien tulokset. (TEM = täysin eri mieltä, OEM = osittain eri mieltä, OSM = osittain samaa mieltä, TSM = täysin samaa mieltä).

Väittämä	TEM	OEM	OSM	TSM	N
1. Opin Työpajatehtävissä käsiteltyjä aiheita paremmin tehtyäni vertaisarviointia toisten opiskelijoiden tehtävistä.	7,8 %	28,4 %	51,0 %	12,7 %	102
2. Opin Työpajatehtävissä käsiteltyjä aiheita paremmin saamani sanallisen palautteen ansiosta.	32,7 %	36,6 %	26,7 %	4,0 %	101
3. Sain riittävästi sanallista palautetta ratkaisuistani.	12,0%	40,0 %	40,0 %	8,0 %	100
4. Koen opiskelijatoverien antaman palautteen oppimisen kannalta tärkeäksi.	15,7 %	39,2 %	40,2 %	4,9 %	102
5. Työpajatyöskentely pakotti tehtävien tarkempaan pohtimiseen.	9,9 %	17,8 %	36,6 %	35,6 %	101
6. Saamani vertaisarviointi sai minut suhtautumaan kriittisesti myös omiin ratkaisuihini.	11,0 %	33,0 %	39,0 %	17,0 %	100
7. Mielestäni Työpajatyöskentely ei edesauttanut oppimista sen paremmin kuin perinteiset laskuharjoitustehtävät.	19,8 %	33,7 %	24,8 %	21,8%	101
8. Ymmärsin Työpajatehtävissä olleita aiheita paremmin nähtyäni vertaisarvioidessa muiden opiskelijoiden hyvin tehtyjä ratkaisuja.	10,9 %	25,7 %	46,5 %	16,8 %	101
9. Opin välttämään vertaisarvioinnissa havaitsemiani opiskelijatoverien tekemiä virheitä.	8,1 %	35,4 %	51,5 %	5,1 %	99
10. Koin Työpajatyöskentelyn kokonaisuudessaan liian työlääksi.	18,2 %	54,5 %	21,2 %	6,1 %	99
11. Tekisin jatkossa mieluummin yhden Työpajatehtävän kuin kaksi perinteistä tehtävää.	24,8 %	24,8 %	32,7 %	17,8 %	101
12. Vertaisarvioitavien Työpajatehtävien osuus viikottaisista harjoituksista voisi olla jatkossa suurempi.	48,5 %	37,6 %	12,9 %	1,0 %	101
13. Harjoittelin LaTeXilla kirjoittamista sen verran, että osaan kirjoittaa sillä matemaattista tekstiä ainakin jonkin verran.	47,1 %	11,8 %	16,7 %	24,5 %	102

FOUR KINDS OF FORMATIVE ASSESSMENT DISCUSSIONS IN INQUIRY-BASED PHYSICS AND MATHEMATICS TEACHING

Pasi Nieminen, Markus Hähkiöniemi, Jarmo Leskinen & Jouni Viiri

University of Jyväskylä

This exploratory case study describes on-the-fly formative assessment interactions from two physics and mathematics inquiry lessons. On-the-fly interactions are unexpected teachable moments in which the teacher tries to probe students' understanding and use that information to support their inquiry process. The video data revealed two dimensions which characterize teachers' on-the-fly practices: 1) How quickly do teachers elicit information from students (quick interpretation or further probing) and 2) do they use that information for helping student to proceed or express students' thinking. These acts relate to teacher guidance in the continuum of authoritative–dialogic which basically indicates how much students' ideas are taken into account for learning. We will validate and refine our preliminary results with larger data set in the future.

INTRODUCTION

Inquiry-based learning has been advocated in educational research and policy in the past decade (Rocard et al., 2007). In science education, inquiry-based learning means that developing of an understanding of scientific concepts and skills involves the use of similar practices which have been used by scientists in their studies. For instance, the processes include identifying questions and formulating hypotheses, planning and carrying out experiments, and developing explanations. Similarly, in mathematics education inquiry-based learning involves various processes such as exploring problems and making conjectures, planning and carrying out problem solving strategy, and evaluation of results. These parts of inquiry can be considered as competences which should be learning goals along with scientific or mathematical concepts. Further, the competences should be an object of assessment too as the assessment influences on what is taught and how is taught (Harlen, 2013).

This study has been done in part of an international EU funded project Assess Inquiry of Science, Technology and Mathematics Education (ASSIST-ME; http://assistme.ku.dk/) which focuses on formative and summative assessment in competence oriented inquiry-based education. In Finland we have worked with primary and upper secondary mathematics and lower secondary physics teachers. We have collected large video data from their inquiry lessons. This paper describes two cases in which one physics teacher and one mathematics teacher implement formative assessment on-the-fly in one inquiry lesson.

The essential difference between formative and summative assessment lies behind their different purposes. Summative assessment is 'assessment of learning' as its purpose is summarize, value and report what is learnt after a certain point of time. Instead, formative assessment is 'assessment for learning' as it attempts to enhance and support student learning in a moment when learning happens (Harlen & Qualter, 2014). There are different ways to implement formative assessment depending on how the data from students is collected (e.g., discussions, tests, reports or portfolios), how the feedback is given (e.g., on-the-fly, marking or peer-feedback), and how formal (planned) it is. On-the-fly refers to informal formative assessment interaction between a teacher and students which is not planned beforehand, but takes place spontaneously when the teacher recognizes appropriate opportunities to support students in advancing their learning (Shavelson et al., 2008). While there are many studies about teacher-student interaction (e.g., Lehesvuori, Viiri, Rasku-Puttonen, Moate & Helaakoski, 2013) only few have studied issues related explicitly to formative assessment. One such study is reported by Ruiz-Primo and Furtak (2006). They developed the ESRU framework which we utilized in our study. The complete ESRU cycle contains following parts: the teacher Elicits information from the student by formulating a question, the Student responds, teacher Recognizes the student's response, and then Uses the information collected to student learning.

In this paper our aim is to understand how teachers implement formative assessment on-the-fly in inquiry-based physics and mathematics teaching. On the other hand, we investigate the affordances and constrains of ESRU framework in analyzing formative assessment on-the-fly. Based on the two cases, we characterize four different kinds of on-the-fly interactions. Our research question is: What kinds of interactions exist during on-the-fly episodes in the lessons of two teachers in terms of ESRU cycles?

METHODS

The data is collected from two Finnish classes (Table 1). Maria is an experienced primary school teacher who teaches only mathematics for this 3rd grade class. James is an experienced lower secondary school teacher as well. These teachers were selected among the teachers who participated voluntarily to the project. The grades and the subjects were set by the guidelines of the international project. The lessons had the same structure: Introduction, inquiry phase in student groups and summary. Lessons (45 min) were videotaped using one camera and the teacher's wireless microphone which captured teacher-student discussions.

Table 1. Participants and data

Teacher	Level	Students	Subject	Topic
Maria	Primary	3th grade, 9 years, $n = 23$	Mathematics	Division
James	Lower secondary	7th grade, 13 years, $n = 13$	Physics	Optics

All on-the-fly interactions were identified. One on-the-fly episode is a conceptual or an inquiry related discussion between a teacher and a student, student group or the whole class. Episodes are initiated by the teacher or students and there is one underlying theme such as how to illustrate the path of the light ray in a particular case. Episode ends when the theme of discussion changes or the teacher moves to another student group. Typically, on-the-fly episode arises when students are working in groups and the teacher is circulating around the class.

The ESRU codes were applied to each speaking turn (teacher and student). However, one speaking turn can include more than one ESRU code. For instance, the teacher may first recognize student answer and use that information after that. ESRU codes reveal eliciting and using which are important phases when the teacher looks for information about student understanding and helps them to proceed or express their thinking. However, ESRU codes do not tell much about the quality of formative actions. In addition, the lack of some code in an episode (incomplete ESRU cycle; e.g., E is missing) does not directly mean that the episode is poor in terms of formative assessment. Thus, episodes were further examined. We carefully compared the on-the-fly -episodes to each other and searched for similarities and difference in formative assessment. As a result, we identified four different kinds of formative assessment discussions.

RESULTS

In the following, we present four kinds of ESRU cycles which were found from the lessons. Although all of them contain an ESRU cycle (complete or incomplete), they differ depending on how the teacher elicits and interprets information from students and how he/she uses that information.

Quick interpretation and helping students to proceed

In many cases, the teacher got some information of students' progress and started quickly to guide students. For example, in the mathematics lesson, a student initiated (Si) the following discussion.

Turn		Transcription	Code
1	Student:	Maria, how should we do, because [inaudible] and eight. Divided by eight.	Si
2	Maria:	Mm. By eight?	R
3	Student:	Yes.	S
4	Maria:	Are there eight of you?	U
5	Student:	No.	S
6	Maria:	No. Read the task one more time. How many?	R
7	Student:	Everyone gets eight macarons.	S

In this discussion, the student mentions "dividing by eight" but in the situation 8 is not the divisor. Maria (primary teacher) spots this and guides the student to notice that 8 is the answer to the task. In this case, Maria did not ask further questions, for example, why they are thinking about dividing by 8. Thus, she seems to fit the students' thinking into her own views. This can be seen also in ESRU coding as there is no eliciting in the beginning of the discussion.

Sometimes there was eliciting in the beginning of the discussion but still the teacher made a quick interpretation without further probing. For example, in the following discussion James (lower secondary teacher) is eliciting before using.

Turn		Transcription	Code
1	James:	How is it going here?	E
2	Alison:	If we understood this…	S
3	James:	Could you tell me how did you understand it?	E
4	Diana:	So, that we have to place the object there and then look that where we can see it.	S
5	James:	Yes. Okay. If we think that this is Alison's eye, so the eye can move along this line here [shows by hand]. Yes. Then you can… here it is said that: "sketch the observer in different places". You can use a ruler for example. In which line segment the eye could be for instance.	U

In this discussion James elicits, makes quick interpretation about students' difficulties and in turn 5 starts to guide students how to write down an observation.

Quick interpretation and helping students express their thinking

Another way how the teachers continued after making a quick interpretation was helping students to express their thinking. For example, in the following episode, students provide some information about their thinking without teacher eliciting.

Turn		Transcription	Code
1	Student 1:	Maria.	Si
2	Maria:	What?	–
3	Student 1:	We put that everyone gets two at first.	S
4	Student 2:	Because we put them like that, we gave at first everyone always two, two, two and two.	S
5	Maria:	Yeah, well write here how you have done.	U
6	Student 2:	Yeah.	S
7	Maria:	Write, write here. Draw how you have divided. Two at first, is it?	U
8	Student 2:	Mm.	S
9	Maria:	Okay, well, draw it. Good thoughts, good thoughts.	U

When Maria gets the information that students are dividing by giving away two at a time, she does not further elicit their strategy. Instead, she guides them express their thinking on paper.

In the physics lesson (an excerpt below) James makes quick interpretation about students' idea and helps them to express the idea.

Turn		Transcription	Code
1	Student:	We are ready.	Si
2	James:	You are ready. Is this it?	R
3	Student:	Yeah.	S
4	James:	Okay. What if the object is in front of the mirror? When can the object be seen via mirror?	E
5	Student:	[inaudible] …from the whole distance.	S
6	James:	From the whole distance. Yes. Justify like in previous part. You could put down what is this illustrating.	R, U
7	Student:	Well, the observer's… [inaudible]	S
8	James:	The area where the observer is looking? Okay. Write it down too.	R, U

The student informs James that they are ready. In the turn 4 James elicits information and get students' idea how they are able to see the object (5). After quick interpretation he helps the students to express their idea without correcting or valuing it (6 and 8).

Probing more students' thinking and helping them to proceed

There were instances in which after the first elicitation, the teacher continued to probe the students' ideas and base the guidance on this. In the mathematics lesson Maria was discussing with a student about the problem of dividing 92 raisins to four people.

Turn		Transcription	Code
1	Maria:	92 raisins. Quite a lot, is it?	E
2	Maria:	Okay, well try. Take, for instance, a smaller number as an example. What kind of? What number can you take? What number?	E
3	Student:	40.	S
4	Maria:	40?	R
5	Student:	I mean 41.	S
6	Maria:	41?	R
7	Student:	46.	S
8	Maria:	46?	R
9	Maria:	Can you say right away who many raisins for each?	E
10	Student:	46 is half and then half of that.	S
11	Maria:	Well yeah, start with that. Start. Mm, could be. Good thoughts.	U

Here the teacher is openly waiting for student's response. The student offers many numbers and the teacher is not evaluating them. When the student says that he is thinking about half and then half of the half, the teacher only encourages the student to continue. After being patient and getting more information about the students' thinking, the teacher fades support. We did not find this kind of discussion from the physics lesson.

Probing more students' thinking and helping students express their thinking

Sometimes after further probing, the teacher guided students to express their thinking. The mathematics lesson included the following discussion.

Turn		Transcription	Code
1	Student 1:	Is this a division?	Si
2	Maria:	Mm, well it could be that you know division already.	R
3	Maria:	Would you like to draw something?	E
4	Student 2:	Cause we don't know...	S
5	Maria:	How do you know that 8?	E
6	Student 2:	Well, I calculated it from the multiplication table.	S
7	Maria:	Well, write it down, all thoughts down.	U
8	Student 2:	Write?	S
9	Maria:	Yes, write down all your thoughts that you have been thinking.	U
10	Student 2:	Do you mean drawing or should I write with letters?	S
11	Maria:	Or calculation or what. How did you think, tell me?	U
12	Student 2:	So like that I was thinking that which multiplication table.	S
10	Maria:	Well, write the multiplication table. Write the multiplication and what. How did you think?	U
11	Student 2:	Should I put here the thoughts?	S
12	Maria:	Yes. Thoughts down. Team work. Not only you. Explain to others.	R

In this discussion, Maria asks many times about students' strategy. Based on the first student utterance, they were already familiar with division and using that. However, it turns out that at least one of the students is thinking about multiplication. After this, Maria guides them to express their thinking on paper.

In the following excerpt from the physics lesson, James probes many times until he gets information about students' ideas. After that he helps students to express their idea and prompts them to write it down.

Turn		Transcription	Code
1	James:	What is going here?	E
2	Student:	Well, when… if we put that… that when…	S
3	James:	Are you working with conclusions?	E
4	Students:	Yeah	S
5	James:	Okay. Do your prediction and your observation differ?	E
6	Students:	Yeah.	S
7	James:	In what way?	E
8	Student:	We thought as if I sit here. Then the mirror is there, so it would be mirrored to this corner but it is in that corner.	S
9	James:	Hm. So, you were here. Here is the object. You sat here. And you see the image… you supposed that it is here, but is in this side.	R
10	Student:	Yes.	S
11	James:	Well. So, you can answer: Do your prediction and observation differ?	U
12	Student:	Yeah.	S
13	James:	Yes. How does the person's location influence the location of the image?	U
14	Student:	It is mirrored like… If you look from side the object is mirrored to that corner where you sit or stay.	S
15	James:	To that corner? So, you considered that the image is like in the different side from the object than your eye, but it is in the same side…	R
16	Student:	Yeah.	S
17	James:	…than your eye. Okay. Yes it is. Yes. Then just write.	R

The E-S-E-S-… structure continues for turns 1 to 9 where James recognizes students' ideas. The turn 11 is evident point in which he starts to use information to help students to express their ideas.

DISCUSSION

In this explorative case study, we have characterized four kinds of on-the-fly formative assessment discussions (Table 2). Getting data of student learning and giving feedback are two dimensions in this characterization. These two dimensions are essential in any formative assessment (Black & William, 2009) and in on-the-fly discussions (Ruiz-Primo & Furtak, 2006). We found that teachers get information about students' learning by quick interpretation or by further probing. Feedback was given in order or to help students to take the next step or to express their current thinking.

Table 2. Four kinds of on-the-fly formative assessment interactions

	1 Quick interpretation	2 Further probing
A Help to take the next step	1A	2A
B Help to express thinking	1B	2B

When a teacher guides students to take the next sept (A) this can be done after a quick interpretation (1A) or after further probing (2A). In the former, the guidance is based on correspondence of the students' and the teacher's ideas. In the latter, guidance is based more on the student's ideas. Thus, the former is more authoritative guidance and the latter more dialogic guidance in the sense of Mortimer and Scott (2003) and Lehesvuori et al. (2013).

The feedback can focus also on getting the students to express their current thinking (B). This can be based on a quick interpretation of where the students are in their learning (1B) or it can include further probing (2B). Through further probing the teacher gets more information about the students' learning and at the same time the students get feedback to explain more.

The four identified formative assessment discussion types are related to ESRU coding (Ruiz-Primo & Furtak, 2006) but there are also differences. The crucial difference is that in ESRU coding, individual utterances are coded whereas the four discussion types describe longer episodes. Sometimes types 1 and 2 can be seen in ESRU coding. For example, the pattern Student initiation – Recognition –Use implies that there was no further probing. On the hand, the pattern Elicit – Student response – Elicit – Student response implies that the episode most likely contain further probing. However, ESRU coding alone cannot be used to identify whether further probing exists because often further probing happens through follow-up questions that use the information of the previous student response and are thus coded as Use. In addition, interpreting whether an episode is of type A or B, includes analyzing the contents of Use.

Ruiz-Primo and Furtak (2006) reported the positive relation between complete ESRU cycles and student achievement. Complete ESRU cycles have all the elements appearing at least once in an episode. We do not question their result, but we consider that there can be formative assessment although a cycle is incomplete. Thus, if we are considering only complete ESRU cycles, we are losing those episodes where teacher makes so quick interpretation that there is not even one elicitation. In our data these kinds of episodes were initiated by students as they explained what they were doing and asked something from the teacher. In these episodes the teacher already got some information without eliciting and was able to use it. Much in the same way also Use can be very limited or even missing if, based on the elicited information, teacher decides to fade support for the students and let them continue on their own.

We do not mean that some of the four types of assessment discussions are valued better than other. We know that further probing students' ideas benefits both the students and the teacher, but because the teacher has to orchestrate the whole classroom, it is not always possible to probe further. For example, it is sometimes better to guide many students quickly than to only guide one student after further probing. Similarly, Mortimer and Scott (2003) argue that there is place for both authoritative and dialogic teacher talk.

We will continue our analysis to find how well the four types of discussions fit with several lessons from primary, lower and upper secondary classes. The categorization will be specified or extended if needed. We will study possible links between on-the-fly discussion types and other factors such as teachers, topics and phases of lesson. We are also interested in commonalities and differences between physics and mathematics lessons in terms of on-the-fly formative assessment.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was supported by the European Union's FP7 funding program.

REFERENCES

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31.

Harlen, W. (2013). *Assessment & inquiry-based science education: issues in policy and practice.* Global Network of Science Academies.

Harlen, W., & Qualter, A. (2014). *The teaching of science in primary schools.* London: Routledge.

Lehesvuori, S., Viiri, J., Rasku-Puttonen, H., Moate, J., & Helaakoski, J. (2013). Visualizing communication structures in science classrooms: Tracing cumulativity in teacher-led whole class discussions. *Journal of Research in Science Teaching, 50*(8), 912–939.

Mortimer, E.F., & Scott, P. (2003). *Meaning making in science classrooms*. Milton Keynes, UK: Open University Press.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: a new pedagogy for the future of Europe*. European Commission.

Ruiz-Primo, M.A., & Furtak, E.M (2006). Exploring teachers' informal formative assessment practices and students' understanding in the context of scientific inquiry. *Journal of Research in Science Teaching, 44*(1), 57–84.

Shavelson, R.L., Young, D.B., Ayala, C.C, Brandon, P.R., Furtak, E.M., Ruiz-Primo, M.A, Tomita, M.K., & Yin, Y. (2008). On the impact of curriculum-embedded formative assessment on learning: a collaboration between curriculum and assessment developers. *Applied Measurement in Education*, 21, 295–314.

VIRHEELLINEN ESIMERKKI MATEMATIIKAN LUOKKA-HUONEKESKUSTELUSSA

Riikka Palkki

Oulun yliopisto

Oikean ja virheellisen esimerkin vertailun on todettu kehittävän matematiikan osaamista. Tässä tutkimuksessa selvitetään, miten neljä seitsemännen luokan matematiikan opettajaa käsittelevät luokissaan virheellistä esimerkkiä oikein tehdyn esimerkin rinnalla, millaisia kysymyksiä he käyttävät ja millaisia virhekäsityksiä oppilailla tulee esiin. Luokissa, joissa opettaja kysyi "miksi"-kysymyksiä ja oppilasmäärä oli pieni, oppilaat kertoivat päättelyään, ja ilmi tuli sekä tehtävään sijoitettuun virheeseen että muuten algebraan liittyviä virhekäsityksiä. Virheellinen esimerkki vaikuttaa lupaavalta keinolta päättelyn harjoittamiseen sekä virheellisten käsitysten selvittämiseen ja korjaamiseen.

JOHDANTO

Algebrallisessa yhtälönratkaisussa muuttujaa aletaan käsitellä molemmilla puolilla yhtälöä. Algebraan siirtyminen on tärkeä, mutta haastava käännekohta koulumatematiikassa (Andrews & Sayers, 2012). Suomessa algebran käsitteelliseen osaamisen on todettu olevan heikkoa, ja opettajat ovat painottaneet laskurutiineja, kun taas yhtälöiden abstrakti ja käsitteellinen puoli on jäänyt vähäiselle huomiolle. Kansainvälisessä vertailussa algebran osaaminen on ollut muita matematiikan osa-alueita heikompaa. (Attorps, 2006; Hihnala, 2005; Kupari, Vettenranta, Nissinen, 2012.) Niin ikään perusteluihin ei suomalaiskouluissa kiinnitetä riittävästi huomiota (Andrews, 2013).

Virheellisen esimerkin käyttö oikein tehdyn esimerkin rinnalla (kuva 1) on aiemmissa tutkimuksissa todettu kehittävän algebran käsitteellistä osaamista sekä oikeiden ratkaisumenetelmien ja käsitteiden käyttöä (Booth, Lange, Koedinger & Newton, 2013; Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Joustava yhtälönratkaisu –projektin (JYR, 2015) eräänä osana käytettiin vastaavia tehtäviä, jotka Virpi Kostama on suomentanut ja muokannut yhdysvaltalaisesta Contrasting cases –materiaalista (Star et al., 2014). JYR–projektissa painotetaan käsitteellistä osaamista, keskustelua, eri ratkaisutapojen vertailua ja itsearviointia.

Tämän tutkimuksen aineistona olivat neljän seitsemännen luokan opettajan ja oppilaiden keväällä 2015 käymät luokkahuonekeskustelut. Tarkoituksena oli selvittää virheellisen esimerkin mahdollisuuksia. Tutkimuskysymykset olivat:

- Millaisia virhekäsityksiä virheellisen esimerkin käyttö tuo esiin?
- Miten opettajat käyttävät virheellistä esimerkkiä? (opettajien toimintatavan kuvaus, käytetyt kysymystyypit ja vastausaika)

TEHTÄVÄ. Kalle ja Leena ovat ratkaisseet yhtälön $\mathbf{45y + 90 = 60y}$ seuraavilla tavoilla:

	Kallen ratkaisu	**Leenan** ratkaisu	
	$45y + 90 = 60y$	$45y + 90 = 60y$	Ensin vähensin molemmilta puolilta termin $45y$.
Ensin yhdistin vasemman puolen termit keskenään.	$135y = 60y$	$45y - 45y + 90 = 60y - 45y$	
Seuraavaksi vähensin molemmilta puolilta termin $60y$.	$135y - 60y = 60y - 60y$	$90 = 15y$	Laskin $60y - 45y$ saaden vastaukseksi $15y$.
	$75y = 0$	$\frac{90}{15} = \frac{15y}{15}$	
Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 75.	$\frac{75y}{75} = \frac{0}{75}$		Lopuksi jaoin molemmat puolet luvulla 15.
Sain ratkaisuksi $y = 0$.	$y = 0$	$6 = y$	Sain vastaukseksi $y = 6$.

Kysymyksiä:

a) Kumpi ratkaisuista on oikein?
b) Mikä virhe on tehty, että on päädytty väärään ratkaisuun?
c) Muodosta omin sanoin ehto, joka kertoo, miten erilaisia termejä saa yhdistää keskenään.

Kuva 1. Oikean ja virheellisen esimerkin sisältävä tehtävä.

VIRHEELLINEN ESIMERKKI MATEMATIIKAN OPETUKSESSA

Algebraan siirtyminen edellyttää riittävät esitiedot muun muassa muuttujakäsitteestä ja yhtäsuuruusmerkin uuden roolin ymmärtämisen (Kieran, 2004; Näveri, 2009). Yhtälönratkaisussa voi näin ollen tehdä monenlaisia virheitä. Matematiikan opettajat näkevät virheiden taustalla neljä pääsyytä: oppilaan piirteet, opettajan roolin, matemaattisen tiedon ja noudatettavat säännöt (Gagatsis & Kyriakides, 2000). Näistä tarkastellaan nyt oppilaiden matemaattista tietoa heidän virhekäsitystensä kautta sekä opettajan toimintaa (roolia).

Virheellisen esimerkin käyttö tarkoittaa tyypillisen virheen esittämistä tarkoituksella, jolloin oppilaat paikantavat virheen ja analysoivat sitä (Star ym., 2014). Tällöin virhekäsityksiä on mahdollista korjata ja toisaalta ennaltaehkäistä. Kuvassa 1 esiintyvä erimuotoisten termien yhdistäminen on tyypillinen muuttujiin liittyvä virhekäsitys (Booth, Barbieri, Eyer & Paré-Blagoev, 2014). Virheellisten esimerkkien käytön vaikutuksista oppilaiden matematiikan osaamiseen on joitain tutkimustuloksia. Väärän ja oikean ratkaisutavan vertailu desimaalilukujen suuruuksia arvioitaessa auttoi oppilaita käyttämään oikeita käsitteitä ja oppimaan ratkaisumenetelmiä paremmin kuin kahden oikean ratkaisutavan vertailu (Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Väärän ja oikean ratkaisutavan käyttö tietokoneavusteisessa ympäristössä auttoi algebran käsitteellisen ymmärtämisen kehittymisessä huolimatta opettajien aluksi epäilevästä suhtautumisesta virheiden esittämiseen (Booth ym., 2013).

Opettajan asennoituminen virheisiin siirtyy helposti oppilaille, ja toisaalta opettajan matemaattinen osaaminen ei johda kykyyn puuttua virheisiin (Tulis, 2013; Son, 2013). On siis perusteltua kiinnittää huomio opettajan toimintaan. Tässä tutkimuksessa kuvataan virhekäsitysten lisäksi opettajan toimintaa luokassa sekä tutkitaan opettajien käyttämiä kysymystyyppejä ja oppilaille antamaa vastausaikaa. Aiemmissa tutkimuksissa opettajan esittämät avoimet kysymykset ja oppilaille annettu 3—5 sekunnin vastausaika vaikuttivat matematiikan menestykseen ja joustavuuteen positiivisesti (Star ym., 2015; Tobin, 1986).

TUTKIMUSMENETELMÄ JA AINEISTON ANALYYSI

Tutkimukseen osallistui neljä pohjoissuomalaista luokkaa (A, B, C ja D), jotka olivat tätä ennen käyttäneet Joustava yhtälönratkaisu –materiaalia 5—6 oppituntia harjoitellen yhtälökäsitettä, muunnoksia ja yhtälönratkaisutaitoja. Kaikkiaan osallistuvia opettajia oli neljä, oppilaita 74 ja keskusteluja neljä. Luokissa käytiin keskustelu kuvan 1 tehtävästä, jossa Kallen ratkaisu sisälsi virheellistä termien yhdistämistä. Keskustelut videoitiin ja litteroitiin muuttaen oppilaiden nimet. Oppilaat, joilta ei ollut lupaa puheen äänittämiseen, eivät osallistuneet. Tutkimusmenetelmänä käytettiin tapaustutkimusta monipuolisen ja syvällisen ymmärryksen saavuttamiseksi tutkimuskohteesta (Creswell, 2007).

Taulukko 1. Opettajien käyttämät kysymystyypit .

Kysymystyyppi	Esimerkkikysymys	Tarkoitus
1 Avoin	”Haluaako joku esittää näkemyksensä tähän?”	Oppilaiden omien ideoiden jakaminen, toisten ideoiden edelleen kehittäminen tai kritisointi tai algebrallinen ajattelu.
2 ”Miksi”	”Miksi ratkaisu on oikein?” ”Miksi tämä tapa on parempi?”	Käsitteellinen ymmärtäminen; miksi ratkaisu on oikein tai miksi ratkaisutapa on ollut hyvä valita.
3 ”Miten”	”Miten sait tämän vastauksen?”	Proseduraalinen ymmärtäminen; miten ongelma on ratkaistu, miten sääntöä on käytetty.
4 ”Mitä”	”Miksi tätä kutsutaan?”	Tiedon jäsentäminen tai vastauksena pelkkä numero tai luku.
5 Retorinen/ valinta	”Onko vastaus viisi?”	Vastaus tyyppiä ”kyllä”/ ”ei”.
6 Logistinen/ hallinta	”Mikä on seuraava kysymys?”	Halutun kysymyksen tai käytöksen pariin ohjaaminen.

Oppilaiden virhekäsitykset etsittiin litteroinneista ja koottiin yhteen. Keskusteluja kuvattiin tapauksittain, tapauksia vertaillen ja merkitystä pohtien (Creswell, 2007). Opettajien toimintaa kuvattiin aineistolähtöisesti luokitellen heidän puhettaan, minkä pohjalta heidän toiminnastaan muodostettiin kuvaukset ja yhteenvedot (otsikoissa). Tässä yhteydessä laskettiin opettajien (kielitieteellisten) lauseiden osuus suhteessa oppilaiden käyttämiin lauseisiin. Toiseksi opettajien käyttämät kysymykset jaoteltiin käyttäen Starin ym. (2015) kysymystyyppejä: 1) Avoin, 2) ”Miksi”, 3) ”Miten”, 4) ”Mitä”, 5) Retorinen/valinta ja 6) Logistinen/hallintaan liittyvä kysymys, joiden tarkemmat selitykset löytyvät taulukosta 1. Starin ym. (2015) analyysista poiketen nyt painotettiin virheen analysointia eikä ratkaisutapojen vertailua, joten kysymystyyppi 2 sisälsi lähinnä perusteluja etsiviä kysymyksiä. Luokittelun tukena käytettiin QSR NVivo –ohjelmaa. Kysymystyyppien lukumäärä laskettiin kunkin opettajan kohdalla ja opettajien oppilaille antama vastausaika arvioitiin yli tai alle 3 sekuntiin.

TULOKSET

Luokka A – Opettaja esittää ”miksi”-kysymyksiä ja korjaa virhekäsityksiä

Luokassa A oli 12 oppilasta, joita opettaja kuvasi taidoiltaan kaikentasoisiksi, ei mielellään matematiikasta keskusteleviksi, mutta melko aktiiviseksi.

Kun opettaja kysyi, kumpi ratkaisuista on oikein, oppilaat valitsivat Leenan ratkaisun. Antti esitteli matemaattisena perusteluna Leenan oikean vastauksen sijoittamisen alkuperäiseen yhtälöön:

Opettaja A	Mistä sen tietää, että se on oikein? Antti. [2 ”miksi”-kysymys]
Antti	Senhän voi ratkaista vaikka sillee, että 45 kertaa kuus plus 90 on… [opettaja keskeyttää]
Opettaja A	Eli tämä voidaan tuonne laittaa. [näyttää] No se on vähän hankala laskea, mutta voithan sä laskea tuota Kallen vastauksella, kun se on helpompi. Laitat tuon tuonne y:n paikalle. 45 kertaa nolla on nolla ja tuolla on 90 ja tästä tullee nolla, niin siitä huomaa, että nyt ei mennytkään oikein.

Tässä ”miksi”-kysymys toi esiin oikean perustelun, joskin opettaja esitteli itse tehokkaamman tavan perustella vastausta.

Oppilaat löysivät virheen ja kertoivat, ettei erimuotoisia termejä saa laskea yhteen. Eräs oppilas käytti ensin sanaa ”samannimiset” sanan ”samanmuotoiset” sijaan, minkä opettaja korjasi. Yleistä sääntöä etsittäessä Satu esitti virheellisen perustelun: ”X ja y ja jne. on muuttujia, joten ne pitää selvittää ennen kuin niitä voi yhdistää.” Opettaja vaikutti tulkitsevan, että Satu tarkoitti, ettei myöskään samanmuotoisia termejä saisi yhdistää ja huomautti tästä. Oppilas ei mahdollisesti hahmottanut, että lauseketta voi sieventää yhtälön sisällä. Oppilas saattoi tosin tarkoittaa, että erimuotoiset termit voisi yhdistää vasta, kun olisi tiedossa muuttujan paikalle sijoitettava lukuarvo. Yleisen säännön pohdintaa:

Timo	Siinä niinku vakiotermit saa yhdistää tai x–termejä tai y–termejä saa yhdistää.
Opettaja A	Roope haluais sanoa vielä eri tavalla.
Roope	Jos termeissä on sama vakiokirjain tai ei kirjainta ollenkaan, niin ne voidaan yhdistää.
Opettaja A	Joo, keskenään. Antti haluais vielä sanoa.
Antti	Yhdistän vain samanmuotoiset termit.
Opettaja A	Joo, se ois ehkä kaikista lyhin. Jos et oo kirjoittanut vielä, niin sen voit kirjoittaa.

Keskustelu eteni sujuvasti oppilaalta toiselle ja oppilaat kuulivat säännön selitettynä hiukan eri tavoin. Kokonaisuudessaan luokan A opettaja esitti melko monta ”miksi”-kysymystä ja oppilaat keskustelivat. Luokan A opettaja ohjaili keskustelua ja tarvittaessa täydensi vastauksia ja korjasi virhekäsityksiä. Opettaja sanoi 50 lausetta, kun oppilaat 16. Tuli esiin kaksi eri virhekäsitystä.

Luokka B – Opettaja kyselijänä ja selittäjänä

Luokassa B oli 17 oppilasta. Opettaja kuvasi luokkaa taidoiltaan heikoksi, joskus matematiikasta keskustelevaksi ja melko passiiviseksi. Ratkaisun pohtiminen:

Opettaja B	Kumpi ratkaisusta on oikein? [5 ”valinta”–kysymys]
Ilkka	Kallen.
Vili	Ei Kallen, Leenan!
Markus	Leenan. Senhän näkee heti, kun näkee, mikä y on. Ei 45 kertaa nolla plus 90 voi olla 60 nolla. [Opettaja jatkaa selitystä pitkällä puheenvuorolla.]

Opettaja ei tarttunut väärään vastaukseen, eikä selvinnyt liittyikö tähän mahdollisesti virhekäsitys. Kohdassa b) keskustelu kulki oppilaalta toiselle:

Kosti	Se on päätellyt sen.
Tuukka	Se jako molemmat puolet 75:llä.
Vesa	Hä.
Kosti	Niin.
Opettaja B	Miksi se ei ois saanu jakkaa 75:llä? [2 ”miksi”-kysymys]
Tuukka	Siitä tulee nolla. […]

Tuukan esittämään virhekäsitykseen kysyttiin yksi “miksi”-kysymys, mutta ei toista, jonka avulla olisi voinut paljastua, miksi oppilas ajattelee, ettei ratkaisuksi voisi tulla nolla. Virhekäsitystä ei nyt korjattu. Oppilailta löytyi oikea vastaus, ja he osasivat perusteella, että samanmuotoisia termejä voi yhdistää. Opettaja selitti lisää itse ja kävi ainoana opettajana läpi oikean ratkaisutavan.

Yleistä sääntöä pohdittiin lopuksi:

Opettaja B	Minkämuotoisia termejä saa yhdistää? [4 ”mitä”–kysymys]
Kosti	Samanmuotoisia.
Opettaja B	Hyvä. Ja mitä se…? [4 ”mitä”–kysymys]
Kosti	Sama kirjain siellä. Sama muuttuja.
Opettaja B	Hyvä. Tai sama kirjain. Sama kirjainosa pittää olla siellä. […]

Luokan B opettaja kyseli oppilailta ja selitti runsaasti itse (62 lausetta). Oppilaat keskustelivat aktiivisesti muihin luokkiin verrattuna (27 lausetta) etukäteiskuvauksesta poiketen. Kolme virhekäsitystä tuli ilmi kolmella eri oppilaalla.

Koulu C – Opettaja innokkaana kyselijänä ilman vastakaikua

Luokassa C on 26 oppilasta, joita opettaja kuvaili melko aktiivisiksi, mutta ei mielellään matematiikasta keskusteleviksi. Luokassa oli runsaasti sekä matematiikassa heikosti että kiitettävästi menestyneitä oppilaita. Tehtävän a) -kohdan oikea vastaus tuli välittömästi, perusteluja ei kysytty. Kohta b):

Opettaja C	Okei. Leena teki oikein. Näin taitaa olla. No, minkäs virheen se Kalle on tehnyt? Mitä hassua Kalle on tehnyt? Mitä väärää? Jenna. [kolmesti 4 “mitä” –kysymys]
Jenna	Se yhdisti niitä erinäköisiä termejä.
Opettaja C	Sanotko mitä se yhdisti? Osaatko kattoa siitä nopeasti? Siinä saa auttaa kaveritkin. Joo? [4 “mitä”; 6 logistinen kysymys]
Jenna	45y ja 90.
Opettaja C	Se laski 45 y ja 90 ja kirjoitti seuraavalle riville, että on 135y [-] ei [-] ja sehän on mahoton, ei me voida laskea y:tä ja numeroita. Ei voi mennä oikein.

Opettaja kyseli ja selitti itse. Yleistä sääntöä etsittäessä oppilailta tuli kirjassa ollut mallimääritelmä, johon opettaja yritti saada tarkempaa selitystä:

Opettaja C	Mietin, että se sana samanmuotoinen on kauhean vaikea. Että jos vaikka kotona sannoo äitille, että katoppa, oonko mää yhistäny samanmuotoisia termejä, niin osaako äiti auttaa? Voisko siihen keksiä vielä jonkun vielä helpomman

	säännön? Mikko, ootko keksinyt? [5 retorinen; 1 avoin; 5 valinta]
Mikko	E.
Opettaja C	Okei, no te kaikki ossaatte siis sen perusteella. No niin, sitten ei mittää. [Opettaja jatkaa seuraavaan asiaan.]

Luokan C opettaja kysyi useita, avoimiakin kysymyksiä, joten hänen toimintansa viittaa innokkaaseen kyselyyn (43 lausetta). Oppilaat eivät mielellään keskustelleet matematiikasta (9 lausetta), kuten opettaja olikin etukäteen kuvaillut. Yhtään virhekäsitystä ei ilmennyt, vaikka opettaja kertoi oppilaiden kuvailleen tehtävää vaikeaksi.

Luokka D – Opettaja pienryhmien ohjaajana ja malliratkaisun kokoajana

Luokassa D oli 19 oppilasta, joita opettaja kuvaili melko aktiivisiksi, jonkin verran matematiikasta keskusteleviksi ja pääosin matematiikassa lahjakkaiksi. Vastaus "Leena" perusteltiin oikeaksi sijoittamalla vastaus alkuperäiseen yhtälöön. Väärää ratkaisua ei käsitelty. Yleistä sääntöä opettaja pyysi vertailemaan pienryhmissä, joiden keskusteluja ei tallennettu. Yhteenvetona opettaja totesi, että kaikki saivat oikean vastauksen. Yhtään virhekäsitystä ei siten tullut ilmi, mihin ryhmän kiitettävät matematiikan taidot saattoivat vaikuttaa. Opettaja lähinnä ohjasi pienryhmiä ja varmisti malliratkaisun (33 lausetta, oppilailla 4).

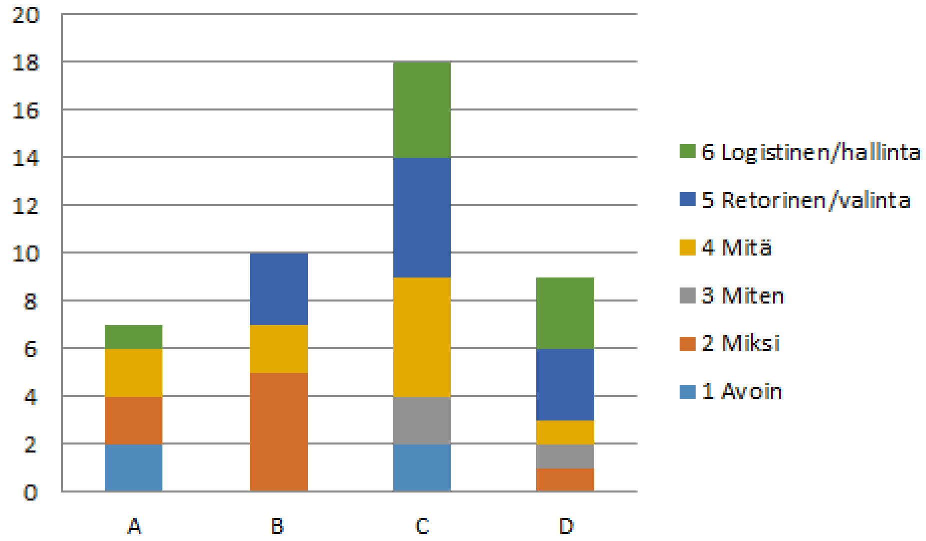
Yhteenveto

Neljä seitsemättä luokkaa käsitteli virheellistä esimerkkiä oikein tehdyn esimerkin rinnalla opettajajohtoisessa keskustelussa. Kahdelta luokan A ja kolmelta luokan B oppilaalta tuli esiin yhteensä viisi eri virhekäsitystä (taulukko 2).

Taulukko 2. Puhutut lauseet ja esiin tulleet virhekäsitykset luokittain.

		Puhutut lauseet		**Virhekäsitykset**	
Luokka	**Oppi-laita**	Opettaja (% kaikista)	Oppilaat (% kaikista)	kpl	Kuvaus
A	12	50 (76%)	16 (24%)	3	- Termien sekoittaminen - Muuttujatermejä ei voi yhdistää (kahdesti)
B	17	62 (70%)	27 (30%)	3	- Kallen vastaus on oikein - Nollaa ei voi saada tu-lokseksi - ”60 nolla” eli kertomerkki puuttuu sijoituksesta
C	26	43 (83%)	9 (17%)	0	
D	19	33 (89%)	4 (11%)	0	

Luokassa A opettaja toimi keskustelun ohjaajana ja tarttui helposti virheisiin. Luokassa B opettaja käytti paljon aikaa selittääkseen ja perustellakseen asioita itse, muttei käsitellyt kaikkia virheitä. Luokassa C opettaja kyseli paljon, mutta oppilaat eivät juuri ottaneet osaa keskusteluun. Luokassa D tehtävän käsittely tapahtui lähinnä pienryhmissä. Virhekäsityksiä esiintyi luokissa A ja B, joissa oppilaat käyttivät enemmän puheenvuoroja kuin luokissa C ja D (taulukko 2). Opettajien esittämät kysymystyypit painottuivat eri tavoin (kuva 2). Luokan A opettajan rooli keskustelun ohjaajana näkyy pienenä kysymysten määränä. Luokan C opettajan useat peräkkäiset kysymykset nostavat hänen esittämiensä kysymysten lukumäärää. Luokan A ja C opettajat kysyivät muutamia avoimia kysymyksiä. Luokan A ja B opettaja kysyivät käsitteellisen osaamisen selvittämiseen tähtääviä ”miksi”-kysymyksiä (Star ym., 2015) melko paljon. Luokkien C ja D opettajat eivät käyttäneet niitä juuri lainkaan eikä virhekäsityksiä tullut esiin lainkaan toisin kuin luokissa A ja B. Oppilaita oli eniten luokissa C ja D. Luokan D opettaja kysyi eniten retorisia ja logistisia kysymyksiä, mikä johtui hänen valitsemastaan lähestymistavasta ohjata oppilaita työskentelemään pienryhmissä. Oppilaille annettu vastausaika oli kaikissa luokissa koko ajan alle kolme sekuntia eli vähemmän kuin matematiikan osaamisen kehittymiselle hyödylliseksi koettu aika (Tobin, 1986), joten sitä ei tarkasteltu tarkemmin.



Kuva 2. Opettajien A, B, C ja D käyttämät kysymystyypit

POHDINTA JA JOHTOPÄÄTÖKSET

Kahdessa luokassa neljästä tuli esiin yhteensä viisi eri virhekäsitystä. Luokkien A ja B oppilaat paitsi korjasivat esimerkkiin sijoitettua tarkoituksellista lausekkeiden sieventämiseen liittyvää virhettä, myös saivat mahdollisuuden muiden virhekäsitysten esiintuomiseen ja korjaamisen, mikä oli uutta aiempiin tutkimuksiin verrattuna (vrt. Booth ym., 2013). Keskustelujen yhteydessä tapahtui termien korjaamista oikeaksi. Aiemmassa tutkimuksena virheellisten esimerkkien tutkiminen oli vaikuttanut positiivisesti termien oikeaan käyttöön (Durkin & Rittle-Johson, 2012). Oppilailla oli ongelmia ymmärtää muuttujan eri rooli lausekkeessa ja yhtälössä, minkä Näverikin (2009, s. 153) on havainnut. Oppilas vaikutti ajattelevan, ettei samanmuotoisiakaan termejä voisi yhdistää ennen kuin niihin olisi sijoitettu jokin luku, kuten lausekkeiden kohdalla tehdään. Tähän voitaisiin mahdollisesti puuttua virheellisellä esimerkillä. Luokan B melko passiivisiksi ja matemaattisiltaan taidoiltaan heikoiksi kuvatut oppilaat kykenivät hyödyntämään virheitä oppimiseen. Tämä on samansuuntaista kuin Durkinin ja Rittle-Johnsonin (2012) tutkimuksessa, mutta päinvastaista Großen ja Renklin (2007) tulokselle, jonka mukaan vain riittävät esitiedot omaavat oppilaat pystyisivät hyödyntämään virheellistä esimerkkiä. Virhekäsitysten pohjalta voi päätellä, että yhtälönratkaisuun tarvittavissa esitiedoissa oli puutteita, jotka nyt saatiin näkyville.

Tämän tutkimuksen tulosten mukaan opettajan esittämät ”miksi”-kysymykset saivat kahden luokan oppilaita osallistumaan: pohtimaan matematiikkaa ja esittämään virheellisiäkin käsityksiään ja perustelujaan. Tämän voi ajatella mahdollistaneen perustelemisen ja käsitteellisen osaamisen kehittymisen, joille suomalaisessa opetuksessa on perinteisesti annettu pieni painoarvo (Andrews, 2013; Attorps, 2006). Luokkien pieni koko saattoi vaikuttaa aktiivisuuteen. Kenties luokissa, joissa ”miksi”-kysymyksiä ei esitetty eikä virhekäsityksiä tullut ilmi (luokat C ja D), ilmapiiri ei aiemminkaan ollut ollut perusteluita hakeva, mistä ”miksi”-kysymysten puute toimi indikaattorina. Opettajien vaikeus havaita virheitä ja puuttua niihin (Son, 2013) tuli ilmi eräässä luokassa, jossa opettaja ei reagoinut kaikkiin oppilaiden virheellisiin ajatuksiin. Vastausaika ei ollut nyt relevantti tutkimuskohde.

Tutkimuksessa on rajoituksensa, sillä siinä käsiteltiin vain neljän luokan yhden tehtävän analysointia, mutta tapaustutkimuksena se oli onnistunut: löydettiin uutta näkökulmaa virheellisten esimerkkien käyttöön luokkahuonekeskustelussa. Virheellistä esimerkkiä voi hyödyntää sekä oppimisen että opettamisen apuna. Virheellisten esimerkkien käyttö oppikirjoissa on harvinaista (Durkin & Rittle-Johnson, 2012). Tämän tutkimuksen perusteella niiden käyttöä voisi lisätä. Tulosten mukaan opettajan aktiivinen asenne ei yksin riitä luokan aktivoimiseen, vaan kysymystyypillä on merkitystä. Jatkotutkimus voisi käsitellä ”miksi”-kysymysten vaikutusta tutkimista, perusteluja ja virheitä sallivan luokkahuonekulttuurin muotoutumiseen ja käsitteellisen osaamisen kehittämiseen.

LÄHDELUETTELO

Andrews, P. (2013). Finnish Mathematics Teaching from a Reform Perspective: A Video-Based Case-Study Analysis. *Comparative Education Review*, 57 (2), 189—211.

Andrews, P. & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior*, 31, 476—488.

Attorps, I. (2006). *Mathematics teachers' conceptions about equations*. Dissertation. University of Helsinki.

Booth, J.L., Lange, K.E., Koedinger, K.R. & Newton, J.K. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, 25, 24—34.

Booth, J. L., Barbieri, C., Eyer, F., & Paré-Blagoev, E. J. (2014). Persistent and Pernicious Errors in Algebraic Problem Solving. *Journal of Problem Solving*, *7*(1), 3.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry & Research Design. Choosing Among Five Approaches*. Sage: Thousand Oaks.

Durkin, K. & Rittle-Johnson, B. (2012). The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude. *Learning and Instruction*, 22 (3), 206—2014.

Gagatsis, A. & Kyriakides, L. (2000). Teachers' Attitudes Toward Their Pupils' Mathematical Errors. *Educational Research and Evaluation*, 6 (1), 24—58.

Große, C. & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction*, 17 (6), 612—634.

Hihnala, K. (2005). *Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämisen. Peruskoululaisen matemaattisen ajattelun kehittyminen aritmetiikasta algebraan siirryttäessä.* Väitöskirja. Jyväskylän yliopisto.

JYR (2015). *Joustava yhtälönratkaisu – LUMA SUOMI –kehittämishankkeen esittely*. Oulu. http://ouluma.fi/joustava-yhtalonratkaisu/

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Teacher*, 8(1), 139—151.

Kupari, P., Vettenranta, J. & Nissinen, K. (2012). *Oppijalähtöistä pedagogiikkaa etsimään. Kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteen osaaminen. Kansainvälinen TIMSS –tutkimus Suomessa.* Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopistopaino.

Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana.* Väitöskirja. Helsingin yliopisto.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84 (1), 49—70.

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B. & Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology*, 41, 198—208.

Star, J. R., Pollack, C, Durkin, K., Rittle-Johnson, B., Lynch, K. Newton, K. & Gogolen, C. (2014). Learning from comparison in algebra. *Contemporary Educational Psychology*, 40, 41—54.

Tobin, K. (1986). Effects of Teacher Wait Time on Discourse Characteristics in Mathematics and Language Arts Classes. *American Educational Research Journal*, 23, 191—200.

Tulis, M. (2013). Error management behavior in classrooms: Teachers' responses to student mistakes. *Teaching and Teacher Education*, 33, 56-68.

DOES RRI FOCUSED SCIENCE TEACHING HELP STUDENTS INCORPORATE RRI INTO THEIR INQUIRY-BASED LESSON PLANS?

Ilkka Ratinen[1], Anna-Leena Kähkönen[1], Anssi Lindell[1] & Miikka de Vocht[2]

[1]University of Jyväskylä, [2]University of Helsinki

Responsible Research and Innovation (RRI) has become an ever more important part of the European society as well as of scientific literacy. RRI is a transparent, interactive process by which societal actors and innovators become mutually responsive to each other with a view to the ethical acceptability, sustainability and societal desirability of the innovation process and its marketable products. But how to include RRI into inquiry-based teaching, which is a well-studied subject, but seldom carried out in practice? To answer this question, such a science education course was designed and piloted for 12 primary student teachers within the EU-funded IRRESISTIBLE project. Their incorporation of RRI was compared to a reference group of 23 primary student teachers, attending a conventional science education course. Our results indicate that, even with a pre-course on RRI, it is difficult for student teachers to include RRI aspects into lesson plans. RRI aspects should be connected explicitly into teaching during the planning phase of training lessons. The biggest impact of the course was to improve student teachers' practise of using disciplinary core ideas in designing science teaching. Student teachers' motivation and commitment improves immensely when they are teaching real pupils rather than taking part of a regular course.

INTRODUCTION

There is an urgent need to incorporate RRI into science education (EU, 2012). Von Schomberg (2013, 19) defined RRI as follows:

> "Responsible Research and Innovation is a transparent, interactive process by which societal actors and innovators become mutually responsive to each other with a view to the (ethical) acceptability, sustainability and societal desirability of the innovation process and its marketable products (in order to allow a proper embedding of scientific and technological advances in our society)."

According to Sutcliffe (2011), RRI in science teaching considers following components: engagement, ethics, open access, science education, governance, and gender equality. What RRI and inquiry-based teaching have in common is that they both reflect the actions of a researcher – inquiry in a smaller, research-oriented context, and RRI in the larger, societal context. There is evidence that inquiry-based teaching effectively prepares pupils for future challenges and supports a better understanding of science and conducting science in general (Lederman, Antink, & Bartos, 2014).

Pupils who participate in inquiry-based teaching achieve better learning outcomes than in traditional teaching (Akkus, Gunelb and Handc's, 2007; Minner, Levy, & Century, 2010). There is evidence that primary student teachers, who familiarize themselves with inquiry-based teaching, understand relatively well how to implement it also in the primary science classroom (Lehesvuori, et al. 2011). In order to support pupils' learning, teachers must be aware of the different phases (cf. 5E model in Bybee et al. 2006; or for an overview of several models, Pedaste et al., 2015) of inquiry-based learning. Furtak, Seidel, Iverson and Briggs (2012) point out that the pupils, who participate in inquiry-based teaching with teacher-led activities, have larger effect sizes of learning than those with student-led conditions. We recognize that there is no single right way to carry out inquiry, but it may entail different levels of openness, as Banchi and Bell (2008, 27) have suggested:

- *Confirmation inquiry* is useful when a teacher's goal is to reinforce a previously introduced idea; students are provided with a question and procedure for confirming or reinforcing a previously learned idea or practicing the specific skills of data collection and recording.
- In *structured inquiry*, the question and procedure are posed by the teacher, but students generate an explanation, supported by the evidence they have collected.
- In *guided inquiry*, the teacher provides students with only the research question, and students design the method to test both the question and any resulting explanations.
- At the highest level of openness, *open inquiry*, students have an opportunity to act like scientists: deriving questions, designing and carrying out investigations, and communicating their results.

However, an argument against inquiry-based learning from Abrahams and Millar (2008) goes that just doing experiments does not lead to better learning outcomes. Also Hodson (2014) criticised that inquiry-based learning necessitates a "doing science" approach in every class.

When one envisions a future that includes RRI into inquiry-based science teaching in a large scale, it is important to know how to develop student teachers' readiness to apply RRI in their classes. It is known that reforms in schools are unlikely to happen, if teachers are not involved from the beginning of the reform process, and teachers' attitudes towards a learning innovation play a "make-or-break" role in the success of that innovation (van Driel, Beijaard, & Verloop, 2001).

The United States National Research Council's Framework for K-12 Science Education and the Next Generation Science Standards (NGSS Lead States, 2013) aims to focus the earlier large scale of topics in science education into a limited number of Disciplinary Core Ideas (DCI). The same trend can be observed in Finnish reformed national core curriculum (POPS, 2014). For example, the only physics concepts asked to be tested explicitly after grade 6 are energy, force and motion. In this core curriculum the content is not expressed as DCIs, but as rather open expressions like "studies of phenomena of light and sound". This apparent openness and teachers' freedom in planning their lessons may induce teaching units with vague objectives, which then may lead to difficulties in assessment.

The difficulty of assessment, and its potential to reduce lessons into rote learning exercises, is recognized by Pellegrino (2013). He writes on the new way of expressing performance expectations via abilities and core ideas, and sees it as an aide for teachers in assessing their students:

> "These statements move beyond vague terms such as "know" and "understand" to more specific statements like analyze, compare, explain, argue, represent, predict, model, etc., in which the practices of science are wrapped around and integrated with core content. --- The virtue of such view is that science educators are poised to better define the outcomes desired from their instructional efforts, which in turn guides the forms of assessment that can help them know whether their students are attaining the desired objectives, as well as how they might better assist them along the way." (Pellegrino, 2013 p. 320)

The NGSS and also in Finnish national curriculum emphases the students' skills to do science and express their learning goals as skills rather than acquired knowledge. Both curricula share the goal of engaging with fewer ideas, explored in more depth, and adopting the scientific or engineering practices (Krajcik & Merritt, 2012; POPS 2014). The core ideas and an ability to formulate them is a great tell of how teachers understand the content or goals of what they are teaching. The difficulty is that most elementary level teacher students have difficulty in recognizing relevant scientific DCIs, because their studies do not focus on skills needed in inquiry.

In this study our data comes from lesson plans; they are a good source in that the student teachers have already become familiar with using them in previous courses, and the plans are required to include a setting of objectives and through those goals, some ideas for assessment. Should the core ideas or RRI components not appear explicitly in the lesson plans, it is seen as unlikely that they were critically thought of or planned into the lessons by the student teachers. Through this data we will be able to show if at all the student teachers use these tools efficiently in planning a lesson, and how their usage of core ideas as basis for lessons, or raising RRI issues in class, changes during one science education course. The aim of the study is to examine how an RRI focused science education course helps student teachers to plan a science lesson and whether their plans include the disciplinary core ideas (DCIs) of science and the components of RRI.

METHODS

Participants

In total, 35 primary school student teachers in their second year of studies participated in this study. One group (*n*=12) took part in the EU-funded Irresistible project (Irresistible group). A control group (*n*=23) studied with conventional lessons (Control group). The student teachers signed up to the groups on a voluntary basis. The course introduced student teachers to theoretical ideas of inquiry-based learning and teaching, planning for teaching, and implementing teaching in the elementary classroom.

Materials and procedures

In the Irresistible group, RRI was included explicitly as RRI workshops, but in control group only as an introduction of Finnish national core curriculum objectives within 30 contact hours of small-group sessions of the course. In the science pedagogy course for Irresistible group, we emphasised that inquiry-based science lessons should include opportunities for students to engage both in inquiry as a process and RRI as a foundation. This was learned in RRI-workshops.

The workshops included a variety of tasks, such as recognizing the different stakeholders in science and society from written and video materials about inventions or research, pinpointing the RRI issues which were not realized in a series of events leading to a disaster (e.g. the asbestos industry), and discussing how pupils or student teachers could act in the spirit of the RRI components (e.g. to promote equality or enhance engagement of people and science background in local policy). The workshops connected RRI to the activities of student teachers in their daily lives, but did not involve plans to incorporate RRI into lessons. The decision was made to support student teachers' freedom to design their own tasks rather than emulate the exact one discussed in class.

The reference course did not include RRI workshops but the aspects of RRI issues were taught as good principles of science teaching. Both groups participated in 20 hours of inquiry-based science education lessons. Before this study, the students of Irresistible group had already passed one science education course.

During the course student teachers in RRI group developed open (Banchi & Bell, 2008) inquiries of different science topics to be included into a teaching module of climate change. In the Control group student teachers also developed open inquiries but the topics were from different areas of science, such as a teaching of seasons or magnetism, for example. Such an approach nicely covers the three important aspects for curriculum development nominated by Krajcik, McNeill and Reicer (2007): unpacking national science standards, developing a learning performances approach to specifying learning goals, and aligning learning goals, instructional activities, and assessments.

An important, explicit goal in the Irresistible group was to create RRI teaching in science context. In the control group, while student teachers were introduced to RRI components implicitly during their course, they were not specifically asked to pay attention to them during inquiry planning.

Analysis

Content analysis (Neuendorf, 2001) of the lesson plans was used to study the student teachers' ideas about teaching the topic of air for Grade 6 students (aged 12 years). The student teachers individually wrote a lesson plan for a 45 min primary science class, both pre and post-instruction. Pre lesson plan was written after the first lesson of the science education course, and post lesson plan after the course.

The DCI defined in the national curriculum (POPS, 2014) were analysed from the objectives of the lesson plans. The evidence of RRI was based on the occurrence of Sutcliffe's (2011) RRI components in the text. The experience of student teachers' plans containing open, vague statements, led to choosing to evaluate ambiguous statements as RRI components. Lesson plans in both groups were interpret positively: when an issue that could be read as an RRI component came up, it was coded as such. For example, open access to information was composed in a lesson plan as follows: "acquisition of information from the Internet, not just from the textbook… … and making a mind map to the smartboard where the facts pupils have found are." Ethical issues in the lesson plans related to research and the effects of research on the environment and it was composed if there where sentences such as "…where is air [experiment]… …air in our everyday live." Engagement was composed according to the sentence which was indicated about the role of different societal actors to make science together: "applying new knowledge… …and use the kitchen of school for the experiment [shrinking the balloon in the freezer]."

The analysis consisted of two researchers' independent coding and categorization, which were then compared. Finally, "science education" –component was excluded because it was obviously in every lesson plan. The percentages were calculated in order to know how many students included the issues of DCI and RRI to their lesson plans. Hake's gain (Hake, 1998) was calculated by using following formula:

$$G = \frac{post\_test\% - pre\_test\%}{100 - pre\_test\%}$$

The statistical significance of DCI and RRI between groups was tested using Mann-Whitney U-test. According to U-test, there was not statistically significant differences between the Irresistible and Control groups (p>0.05). The statistical significance between the Pre- and Post-test of DCI and RRI was tested using McNemar test. Test indicated the statistically significant differences between the Pre- and Post-test of DCI (p<0. 001).

As the goal of this research is to see whether the designed course structure had any impact on the ability to plan RRI components into teaching plans, and both groups were evaluated in a more positive manner, this decision allowed us to compare differences between the groups and the overall impact of the courses. However, we do not make claims that all coded RRI components are equally seriously thought out, or furthermore that they would be realized in enacting such a plan in class settings.

RESULTS

Disciplinary Core Ideas in Lesson Plans

Before the science education course, none of the student teachers in the Irresistible group and only one in the control group based their plans on DCIs (Table 2). The course had a good impact on this design principle: Hake's gain in Irresistible group was 0.58 and in the conventional group 0.43.

Table 2. The number of student teachers' lesson plans that were based on an adequate disciplinary core ideas (DCIs) in science.

	Irresistible (n=12)		Control (n=23)	
	Pre	Post	Pre	Post
DCI	0	7 (58%)	1 (4%)	10 (44%)
G		0.58		0.43

p>0.05 between groups; p<0.001 between pre- and post-test

The content analysis of the lesson plans revealed that students use of DCIs improved during the science education course. According to the following quotations, student teachers commonly wrote scientific core ideas in their pre lesson plans as a learning outcomes. They also expressed these goals quite imprecisely:

> Student teachers$_{\text{Irresistible}}$ a: Exploring the properties of air.
>
> Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ b: Understand what is air, its contents, and how it behaves.
>
> Student teacher$_{\text{Control}}$ c: Understand what is air, content and behavior.
>
> Student teacher$_{\text{Control}}$ d: After lesson pupils understand what is air and how they better understand it after their observations.

The following post-plan quotations indicate that student teachers expressed the scientific core ideas quite vaguely also after the science education course. However, in the post-lesson plans learning goals are greatly improved. Although learning goals are still expressed in a compact manner, students are now expressing science content in greater detail:

> Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ a: Air is a mixture of gases.
>
> Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ b: Air is a substance which expands and contracts on the effect of temperature changes.
>
> Student teacher$_{\text{Control}}$ c: Air is a substance and behaves differently in different temperatures.
>
> Student teacher$_{\text{Control}}$ d: Air is a mixture of gases.

However, the statements do not explicitly express what it was that the student teachers expected their pupils to learn. Summing up, before the science education course, the DCIs were expressed vaguely, but student teachers learned to formulate scientifically more coherent core ideas during the course.

RRI Components in Lesson Plans

The results on the RRI components were varied. Table 3 indicates that relatively more student teachers of the Irresistible group than of the control included RRI aspects in their lesson plans – this was true already before the course. Still, the improvement during the course was better (gain 0.16) than in the control group (gain 0.05), but not statistically significant.

Notably, RRI components of open access and ethics were the ones most often included in the lesson plans of both groups. Some components were not addressed by any student teachers in either group. Especially, governance, gender and equality were absent from the lesson plans.

One of the RRI components, science education - understood as promoting children's interest toward science and understanding the importance of science education - was left out of the analysis. This is because any science education must be a part of this goal. The idea that students need the metacognitive awareness of the role of science education in public policy is not feasible to us. The way we understand science education within the RRI themes is that the students learn to appreciate scientific knowledge and understand there is a need for such knowledge in the wider society.

Table 3. At least one RRI component (other than science education) included in student teachers' lesson plan

	Irresistible (n=12)		Control (n=23)	
	Pre	Post	Pre	Post
RRI included	6 (50%)	7 (58%)	5 (22%)	6 (26%)
G		0.16		0.05

$p>0.05$ between groups; $p>0.05$ between pre- and post-test

Student teachers most commonly include open access as an aspect of RRI as exemplary quotations below indicate. There were no variations in pre and post lesson plan between the groups, meaning that the way student teachers wrote about a particular RRI aspect was very similar with the other groups.

The following quotes are examples of ideas of open access evident in the lesson plans:

> Student teacher$_{\text{Control}}$ e: Pupils work in groups and use internet for obtain data.

> Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ f: Based on their findings, each group makes a selected output (video, writing etc.) that will be presented to others (comparing results and discussing further).

> Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ g: Each group makes an output (figures, videos, texts) and presents their ideas to the other groups. The other groups evaluate the output

Moreover, as the following quotations express, student teachers associated the engagement and ethical aspects of science with pupils' everyday life.

Student teacher$_{\text{Control}}$ a: Consider how air influences everyday life, such as air resistance and thermal expansion of air.

Student teacher$_{\text{Irresistible}}$ h: Important to know how to do demonstrations and examples, which explain the theory in practice and everyday life.

CONCLUSIONS

This study exemplifies the difficulty of integrating RRI into inquiry-based science teaching - regardless of whether RRI is embedded in the student teachers' course materials. Neither of the groups developed a good competence of using the RRI components in their lesson plans, and this despite our positively and optimistic interpretation of RRI components in the plans!

A good design of a science lesson needs to be established on the DCIs - which are not clearly expressed in the national curriculum. This principle, which is not self-evident, was learned quite well in both of the groups. The student teacher course provided a working learning environment for this task.

We wonder whether it is difficult for student teachers to consider both RRI and inquiry aspects simultaneously in their lesson plans. The disciplinary core ideas and the RRI components were expressed in a relatively simple way in student teachers' lesson plans.

It was evident that student teachers most commonly incorporated ethics and open access into their lesson plans. They are aspects probably associated often with their everyday life, and also the aspects that sparked most discussion in the RRI workshops. Moreover, they typically discuss ethical issues and open access in many other pedagogical courses and teacher training, and thus these are the most reinforced of the six components.

The considerably greater number of Irresistible student teachers in the Table 3 including RRI themes in their pre-plans already may be due to that they had already had an applying environmental education course before this study.

The main message to us is that the RRI workshops and working methods of the course need to be changed in order to better provide student teachers with skills to use RRI components in their future lessons. Our results cannot be generalized, but they reveal student teachers' decisions of what they view as important parts to include in their lesson plans, and RRI components were often not seen as essential.

We see our RRI workshops for student teachers lacking in guidance for classroom implementation: noticing suitable spots for bridging to RRI components, comparing the RRI components with the National Curriculum to reinforce its place in school lessons, practising making assessment questions on RRI topics. In making sure the teachers weren't copying off a given model for an RRI task, we accidentally deprived them of any examples or even discussions of student level implementation. Their experience of self-planning the implementations of RRI components was clearly not positive enough to carry on to future lessons.

Based on our results, we cautiously recommend RRI to be explicitly addressed throughout primary teachers' education, and particularly to be included as an expected part of the practise lessons planned and given to build experience of how to engage students in discussing and pondering the RRI components.

The slight difference between Irresistible and Control group, although not statistically significant, can be explored further with a larger group of student teachers. For getting detailed description of student teachers learning process during a science education course it would be necessary to acquire larger data set and apply versatile methodology, such as interviews, for triangulation. Much of this data is being presently gathered in the whole IRRESISTIBLE project.

REFERENCES

Abrahams, I., & Millar, R. (2008). Does practical work really work? A study of the effectiveness of practical work as a teaching and learning method in school science. *International Journal of Science Education*, *30*(14), 1945–1969.

Akkus, R., Gunelb, M. & Handc, B. 2007. Comparing an Inquiry-based Approach known as the Science Writing Heuristic to Traditional Science Teaching Practices: Are there differences? *International Journal of Science Education, 29*(14), 1745-1765.

Banchi, H., & Bell, R. (2008). The many levels of inquiry. *Science and Children, 46*(2), 26–29.

Bybee, R., Taylor, J, Gardner, A., Van Scotter, P., Carlson Powell, J., Westbrook, A. & Landes, N. (2006). The BSCS 5E Instructional Model: Origins and Effectiveness. A Report Prepared for the Office of Science Education National Institutes of Health. http://bot.fi/16k1. Retrieved 31.3.2015.

van Driel, J. H., Beijaard, D., & Verloop, N. (2001). Professional development and reform in science education: The role of teachers' practical knowledge. *Journal of Research in Science Teaching, 38*(2), 137-158.

EU. (2012). Responsible Research and Innovation. Europe's ability to respond to societal challenges. European Commission, Publication office.

Furtak, E. M., Seidel T., Ivarson, H. & Briggs, D. C. (2012). Experimental and Quasi-Experimental Studies of Inquiry-Based Science Teaching: A Meta-Analysis. *Review of Educational Research, 82*(3), 300–329.

Hake, R. R. (1998). “Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics courses,” Am. J. Phys. 66(1), 64-74.

Hodson, D (2014). Learning Science, Learning about Science, Doing Science: Different goals demand different learning methods, *International Journal of Science Education, 36*(15), 2534–2553.

Krajcik, J., & Merritt, J. (2012). Engaging Students in Scientific Practices: What does constructing and revising models look like in the science classroom?. *Science and Children, 49*(7), 10.

Lederman, N. G., Antink, A., & Bartos, S. (2014). Nature of science, scientific inquiry, and socioscientific issues arising from genetics: A pathway to developing a scientifically literate citizenry. *Science & Education, 23*(2), 285–302

Lehesvuori, S., Ratinen I., Kulhomäki, O., Lappi, J. & Viiri. J. (2011). Enriching primary student teachers’ conceptions about science teaching: Towards dialogic inquiry-based learning. *Nordina, 7*(2), 140–159.

Neuendorf, K. A. (2001). The Content Analysis Guidebook. London: Sage Publications.

NGSS Lead States. (2013). Next Generation Science Standards: For states, by states. Washington: The National Academies Press.

Minner, D.D., Levy, A.J., & Century, J. 2010. Inquiry-based science instruction – what is it and does it matter? Results from research synthesis from years 1984 to 2002. *Journal of research in science teaching, 47*(4), 474–496.

Pedaste, M., Mäeots, M., Siiman, L. A., de Jong, T., van Riesen, S. A., Kamp, E. T., ... & Tsourlidaki, E. (2015). Phases of inquiry-based learning: Definitions and the inquiry cycle. *Educational research review*, *14*, 47-61.)

Pellegrino, J. W. (2013). Proficiency in science: Assessment challenges and opportunities. *Science, 340*(6130), 320-323.

POPS. (2014). Opetushallitus, Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf. Retrieved 28.12.2015.

Von Schomberg, R.(2013). "A vision of responsible innovation". In: R. Owen, M. Heintz and J Bessant (eds.) Responsible Innovation. London: John Wiley.

Sutcliffe, H. (2011). A report on responsible research and innovation. Brussels: Matter.

MURTOLUVUN JA LUKUSUORAN PISTEEN VÄLINEN VASTAAVUUS – TYYPILLISIMPIÄ VIRHEITÄ LUOKANOPETTAJAOPISKELIJOIDEN SUORITUKSISSA

Harry Silfverberg & Anu Tuominen

Turun yliopisto

Teetimme luokanopettajaopiskelijoilla monialaisten opintojen matematiikan kurssilla testin, jolla tutkimme, miten hyvin opiskelijat osaavat käyttää murtolukujen eri representaatioita ja miten hyvin he ymmärtävät representaatioiden välisiä yhteyksiä. Aiemmissa tutkimuksissa on todettu, että perusasteen oppilaat eivät useinkaan miellä murtolukuja lukuina, joilla on vastineensa lukusuoran pisteinä, vaan ennemminkin kahden kokonaisluvun muodostamana kombinaationa kuvaten osan suhdetta kokonaisuuteen. Artikkelissa tarkastelemme, esiintyykö myös aikuisilla luokanopettajaopiskelijoilla vaikeutta käsitellä murtolukuja lukuina. Havainnollistaaksemme ilmiötä tarkastelemme eräitä opiskelijoiden virhesuorituksia, joita ilmeni erityisesti osioissa, jotka käsittelivät murtoluvun ja lukusuoran pisteen välistä vastaavuutta.

JOHDANTO

Lukualuelaajennukset yhtäältä positiivisista kokonaisluvuista positiivisiin rationaalilukuihin ja toisaalta positiivista luvuista negatiivisiin lukuihin ovat tunnetusti isoja askelia alakoulun oppilaan lukukäsitteen kehityksessä. Kouluopetuksessa oppijan lukukäsitteen kehitystä on perinteisesti tuettu käyttämällä erilaisia malleja havainnollistamaan erityyppisten lukujen luonnetta ja ominaisuuksia. Ymmärryksen syntyä autetaan käyttämällä hyväksi oman tekemisen kautta syntyvää kehollista tuntemista ja motorista muistia sekä moninaisia visuaalisia malleja ja toimintamateriaaleja. Myös matematiikka itsessään käyttää eri asioille erilaisia esitystapoja ja representaatioita eri tilanteissa. Esimerkiksi murto- ja sekaluvuille, jotka tässä artikkelissa ovat keskiössä, käytetään symbolimerkinnän, kuten $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{6}$ $1\frac{2}{3}$, ohella joukko-, pinta-ala- ja janamalleja havainnollistamaan lukujen osa – kokonaisuus -tulkintaa. Vastaavasti rationaalilukujen desimaalimuunnokset ja lukuja vastaavien pisteiden sijoittaminen lukusuoralle korostavat rationaalilukujen suuruusjärjestystä ja tiheyttä sekä kuulumista osaksi reaalilukujen joukkoa. Rationaalilukujen yhteys prosentteihin tulee käyttöön erityisesti tarkasteltaessa eri yhteyksissä tutkittavien määrien suhteita. Opetustilanteessa erilaisia representaatioita käytetään, jotta tarkasteltavat asiat ymmärrettäisiin helpommin, paremmin ja monipuolisemmin. Tosiasia kuitenkin on, että se, mitä erilaisilla representaatioilla havainnollistetaan ja miksi niitä käytetään, on itsessäänkin oppimistehtävä sekä oppijoille että aloitteleville opettajillekin.

Kouluikäisten tavallisimmat virhekäsitykset rationaaliluvuista

Tunnettua on, että lukukäsitteen laajentamiseen kokonaisluvuista rationaalilukuihin sisältyy monia oppimisen haasteita. Rationaalilukujen ymmärryksen rakentumista on tutkittu vuosikymmeniä ja ilmiötä tutkitaan aktiivisesti edelleen. Tutkimusta tehdään sekä matematiikan opettamisen näkökulmasta että oppimispsykologisena erityiskysymyksenä. Tutkimustulokset osoittavat varsin kiistattomasti, että oppimisen alkuvaiheessa

- rationaaliluvuilla oletetaan varsin yleisesti olevan sellaisia kokonaislukujen ominaisuuksia, joita niillä ei tosiasiassa ole (ns. whole number bias), kuten yksikäsitteinen suuruusjärjestyksessä seuraavan luvun olemassaolo (Ni & Zhou, 2005);
- osa–kokonaisuus –tulkinta on vallitseva tapa ymmärtää varsinkin aitoja murtolukuja eikä murtolukuja välttämättä ajatella lainkaan lukuina (Hannula, 2003), joilla on vastinpisteensä lukusuoralla, vaan ennemminkin kahden luvun muodostamana kombinaationa (Pitkethly & Hunting, 1996, 10);
- rationaalilukujen tiheyttä on vaikea ymmärtää ja oppijat tukeutuvat luonnollisten lukujen diskreettisyyteen (Hannula ym., 2006; McMullen ym., 2014; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010);
- rationaalilukujen monet tulkinnat (osa-kokonaisuus -tulkinta, suhdetulkinta ja sitä kautta yhteys prosentteihin, tulkinta jakolaskuksi ja sitä kautta yhteys desimaalilukuihin, desimaalilukujen tulkinta murtolukuina, suuruuden säilyminen laventamisessa ja supistamisessa yms.) tekevät lukualuelaajennuksesta oppijalle haasteellisen ja monitahoisen oppimiskokonaisuuden (ks. esim. (Kurvits, 2009));
- rationaalilukujen ja desimaalilukujen merkintätavat poikkeavat toisistaan, lukujen suuruusvertailu tapahtuu erilaisella proseduurilla ja aritmeettiset operaatiot poikkeavat toisistaan, josta syystä monet oppilaat eivät ymmärrä rationaaliluvun ja desimaaliluvun esittävän samaa lukua (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010).

Aikuisten käsitykset rationaaliluvuista

Rationaalilukujen ymmärryksen tutkimus on luonnollisesti kohdistunut pääosin sen ikäisiin lapsiin ja nuoriin, joille näitä asioita koulussa opetetaan. Vähäisemmälle huomiolle on tutkimuksessa jäänyt aikuisten ja erityisesti niiden, jotka näitä asioita opettavat, ts. opettajien ja opettajaksi valmistuvien lukukäsitteen hallinta. Osittain tämä johtuu siitä, että on pidetty itsestään selvänä, että aikuiset ovat omana kouluaikanaan jo oppineet riittävän hyvin alakoulussa opetettavat asiat. Kuitenkin on tehty tutkimuksia myös opettajien tavasta hahmottaa rationaalilukuja. Eräät tutkimuksista antavat viitteitä siitä, että osalla alakoulun opettajista ja opettajaksi opiskelevista on samantapaisia puutteita rationaalilukujen käsittelyssä kuin oppilaillakin (Post, Harel, Behr, & Lesh, 1988; Zhou, Peverly, & Xin, 2006; Sowder, Bedzuk, & Sowder, 1993; Park, Güçler, & McCrory, 2013). Aikuiset tosin näyttävät käyttävän joustavammin eri strategioita käsitellessään lukumääräsuhteita, kuten esimerkiksi murtolukujen suuruuden vertailua (Bonato, Fabbri, Umiltà, & Zorzi, 2007) ja kompensoivat näin osin rationaaliluvun käsitteen hallinnan puutteita.

Luokanopettajaopiskelijoiden koulutuksensa myötä hankkimien matematiikan taitojen tutkimus ja arviointi on monella tapaa tärkeää. Ensinnäkin opettajan omalla aineenhallinnalla (Ball, Thames, & Phelps, 2008) on yhteys siihen, millaisia matematiikan tietorakenteita ja käsityksiä hänen oppilaansa muodostavat (Hill, Rowan, & Ball, 2005). Toisaalta arviointitieto palvelee koulutuksen resurssien suuntaamista kohteisiin, joissa kehittämisen tarvetta erityisesti on. Rohkaiseva havainto siitä, että tällainen diagnostinen toiminta kannattaa, saatiin muun muassa Hannula ym. (2010) tutkimuksessa, jossa todettiin, että varsin pienillä toimenpiteillä luokanopettajakoulutuksessa voidaan korjata opiskelijoiden virhekäsityksiä rationaalilukujen luonteesta.

TUTKIMUSKYSYMYS

Toteuttamallamme lomakekyselyllä pyrimme saamaan yleiskuvan siitä, miten hyvin luokanopettajaopiskelijat osaavat käsitellä murtolukuja käyttäen eri representaatioita ja miten hyvin he ymmärtävät representaatioiden välisiä yhteyksiä. Testin osiot käsittelivät representaatioita ja niiden välisiä muunnoksia, kun rationaalilukuja käsitellään murto-, seka- ja desimaalilukuina tai havainnollistetaan pinta-ala-mallien tai lukusuoran avulla.

Tässä artikkelissa rajoitumme kuitenkin tarkastelemaan vain seuraavaa yleisluontoista tutkimuskysymystä: Millä tavoin luokanopettajaopiskelijat ymmärtävät murtolukujen ja lukusuoran pisteiden välisen vastaavuuden?

MENETELMÄ

Murtolukujen representaatioiden välisiä yhteyksiä käsittelevä testi käsitti 10 osiota, joissa seitsemässä oli 2–4 alaosiota. Testiin vastasi 106 luokanopettajaopiskelijaa, joista 96 vastasi kaikkiin tässä yhteydessä tarkasteltaviin osioihin. Kyselylomakkeessa ei kysytty vastaajan nimeä eikä sukupuolta. Kaikki opiskelijat olivat suorittaneet koulutusohjelmaan kuuluneen ensimmäisen matematiikan pakollisen opintojakson (3 op).

Tutkimuskysymykseen vastataksemme tarkastelemme lähemmin opiskelijoiden vastauksia kolmeen testiosioon, joilla selvitimme, kuinka hyvin vastaajat osaavat

1) sijoittaa murto- tai sekalukuna annetun luvun vastinpisteen lukusuoralle (osio 5),

2) sijoittaa pinta-alamallin avulla havainnollistetun murtoluvun vastinpisteen lukusuoralle (osio 8) ja
3) ilmoittaa lukusuoralle merkityt neljä pistettä murto- tai sekalukumuodossa (osio 9).

Osiot 5, 8 ja 9 esittelemme lähemmin luvussa Tulokset. Kohdassa 1) ja 2) hyväksymiskriteeri oikealle suoritukselle oli, että luvun sijainti vastasi likimain pisteen todellista paikkaa ja pisteiden määrittämien osavälien (kuudes- ja kolmasosien) pituudet olivat silmämääräisesti arvioiden oikeassa suhteessa toisiinsa nähden. Kohdassa 3) edellytimme oikeaan suoritukseen, että vastaukset annettiin lukusuoralle merkittyjen jakovälien mukaisesti seitsemäsosina ja lukuarvot olivat oikeita. Oikeiden suoritusten ohella nostamme esiin eräitä opiskelijoiden suorituksiin sisältyneitä virheitä, ja pohdimme, millaisia virhekäsityksiä niiden taustalla voi olla.
Kahdessa ensin mainitussa osiossa 5 ja 8 lukusuoraan oli merkitty valmiiksi vain origo (kohta 0) ja yksikkövälin päätepiste (kohta 1). Tällä pyrittiin jättämään opiskelijalle mahdollisimman suuri vapaus valita strategia, jolla hän määrittää murtolukuja vastaavien pisteiden sijainnit lukusuoralla. Kolmannessa osiossa 9 lukusuoralle merkittyjen seitsemäsosien avulla korostettiin osavälien ja yksikköjanojen osa–kokonaisuus-luonnetta.

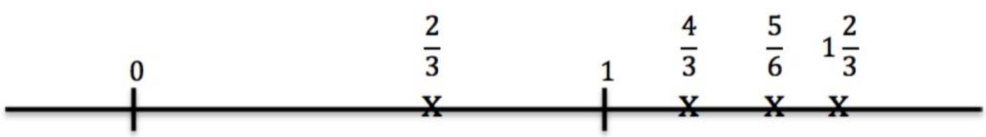
TULOKSET

Osio 5

Osiossa annetut murto- ja sekaluvut tuli esittää lukusuoran pisteinä.

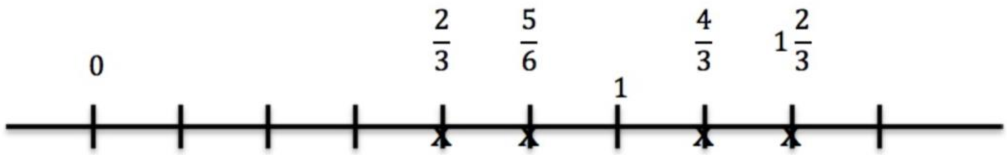
Osio 5. Sijoita luvut $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}$ *ja* $1\frac{2}{3}$ *lukusuoralle.*

Osioon vastasi oikein 82 vastaajaa 106:sta (77,4%). Erehtymisiä sattui asetettaessa lukuja suuruusjärjestykseen. Pisteiden sijoituksen perusteella koko aineistossa viisi vastaajaa piti lukua $\frac{5}{6}$ ykköstä suurempana (Kuva 1) ja yksi vastaaja lukua $\frac{5}{6}$ pienempänä kuin $\frac{2}{3}$. Kuvat opiskelijoiden autenttisista vastauksista on painoteknisistä syistä korvattu uudelleen piirretyillä kuvilla, joissa pisteiden sijainnit vastaavat opiskelijan tekemiä merkintöjä.

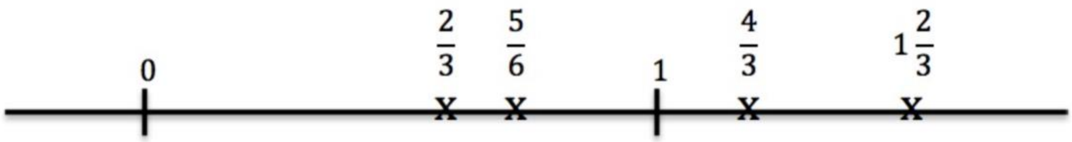


Kuva 1. Esimerkki opiskelijan ratkaisusta ($\frac{5}{6} > \frac{4}{3} > 1$). Mahdollisesti vastaaja on ajatellut, että 5 > 4 ja 6> 3, joten $\frac{5}{6} > \frac{4}{3}$.

Yleisin virhe osion suorituksessa oli pisteiden merkitseminen lukusuoralle niin, että kolmasosien pituiset jakovälit olivat selvästi erimittaiset ja kuudesosa ei ollut puolta kolmasosasta (Kuvat 2 ja 3).



Kuva 2. Opiskelijan ratkaisu, jossa kuudesosat ykkösen vasemmalla puolella ja kolmasosat ykkösen oikealla puolella ovat lukusuoralla lähes yhtä pitkät.



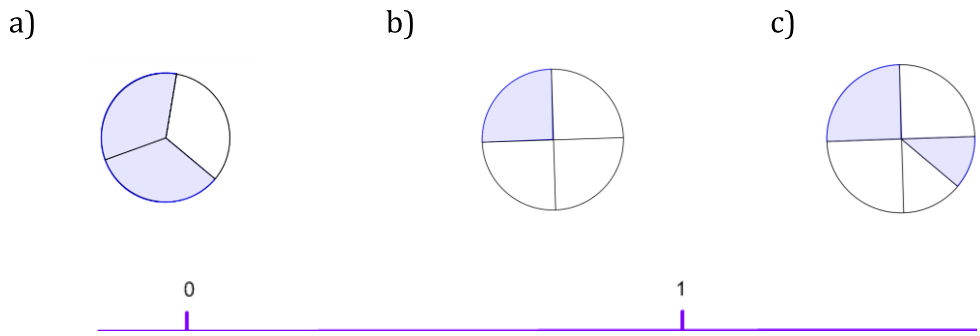
Kuva 3. Opiskelijan ratkaisu, jossa kuudes- ja kolmasosien suuruudet vaihtelevat.

Noin neljäsosalla vastaajista eli 24 vastaajalla lukusuoralle merkittyjen pisteiden keskinäiset välit eivät noudattaneet ”tyrkyllä” ollutta kolmas- ja kuudesosien määrittämää struktuuria. Koska useimmat vastaajista oletettavasti sijoittivat pisteet silmämääräisesti, luokittelussa aika suuretkin epätarkkuudet sijoittelussa hyväksyttiin.

Osio 8

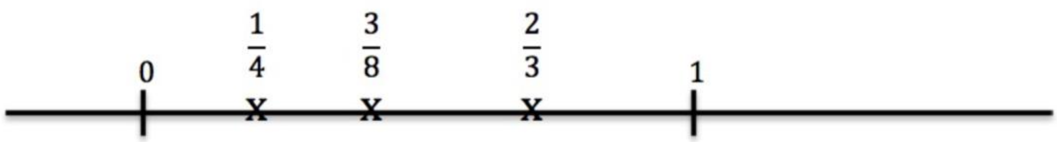
Osiossa pinta-alamallin avulla annettu murtoluku piti esittää lukusuoran pisteenä.

Osio 8. Merkitse väritettyä aluetta vastaava osuus lukusuoralle



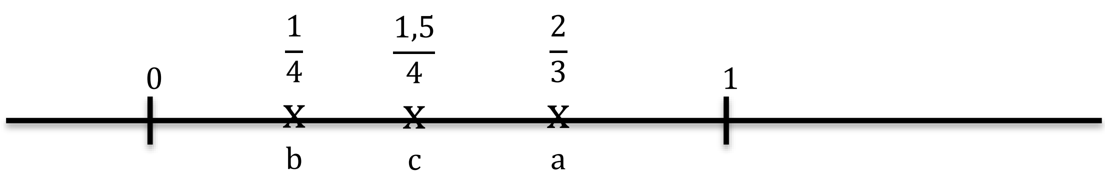
Osioon vastasi oikein 77 vastaajaa 103:sta (75,8%). Erinimiset kolmas-, neljäs- ja kahdeksasosat näyttivät tuottavan joillekin opiskelijoille vaikeuksia. Kuusi vastaajaa käytti lukujen suuruussuhteiden vertailussa hyväksi murtolukujen samannimisiksi laventamista.

Esimerkiksi eräs opiskelija oli jakanut osion kohdassa c) esitetyn neljäsosaa vastaavan sektorin kahtia, joka viittaa siihen, että hän hahmottaa väritetyn alan olevan $\frac{3}{8}$. Tästä huolimatta hän merkitsee kohdan $\frac{3}{8}$ lukusuoralle paikkaan, joka vastaa ennemminkin tulkintaa $\frac{3}{8} = 2 \cdot \frac{1}{4}$ (vrt. Kuva 4).



Kuva 4. Opiskelijan ratkaisu, jossa kolmas-, neljäs- ja kahdeksasosien suuruudet eivät ole oikeassa suhteessa.

Kuva 5 puolestaan esittää toisen opiskelijan ratkaisua, joka selvästi hahmottaa, että kuvion väritetty osa on $1{,}5 \cdot \frac{1}{4}$, mutta sijoittaa silti c-kohdassa kysytyn pisteen kohtaan, joka vastaa lähinnä tulkintaa $2 \cdot \frac{1}{4}$.



Kuva 5. Opiskelijan ratkaisu, jossa lukusuoralle merkittyjen pisteiden sijainnit eivät vastaa lukujen suuruussuhteita.

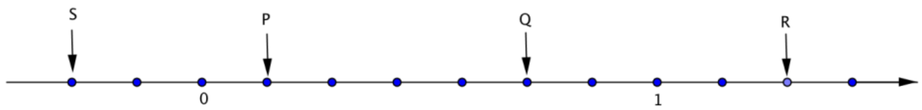
Kummassakaan edellä esitetyssä esimerkissä lukujen hahmotetut algebralliset suuruussuhteet eivät siirry lukusuoran geometriseen malliin pisteiden välisten etäisyyksien suhteiksi.

Osio 9

Osion asetelma oli käänteinen osioon 5 verrattuna. Lukusuoralle sijoitetut neljä pistettä tuli esittää murto- tai sekalukumuodossa.

Osio 9. Ilmoita lukusuoralle merkityt luvut P, Q, R ja S murtolukumuodossa sillä tarkkuudella kuin voit ne kuvasta määrittää.

P = Q = R = S =



Tehtävään vastauksen antaneista 96 opiskelijasta 74 (77,1%) liitti oikean murto- tai sekaluvun jokaiseen annetuista neljästä pisteestä. Viisi vastaajista ilmoitti pisteet P, Q ja R murto- tai sekalukuina oikein, mutta jätti negatiivisen lukuarvon S merkitsemättä. Lisäksi kolmella vastaajalla R ja S olivat molemmat vastaamatta, mutta P ja Q oikein. Puutteet vastauksissa antavat aiheen epäillä, oliko osalla opiskelijoista käsitys, että murtolukumuotoa käytetään osa–kokonaisuus –tulkinnan mukaisesti vain lukualueella nollasta yhteen.

Erityisesti luvun S negatiivisuus aiheutti joillekin vastaajille ongelmia. Hämmästyttävästi seitsemän vastaajaa merkitsi S:n arvoksi $-\frac{5}{7}$. Koska käytettävissä olivat vain vastauspaperin merkinnät, voi vain arvailla, johtuiko tämä siitä, että seitsemäsosat luettiin kohdasta -1 alkaen oikealle kohtaan S saakka, vai jostain muusta. Osioon jätti ratkaisun 96 opiskelijaa, joista 74 ratkaisi tehtävän oikein. Joka tapauksessa noin joka viidennellä vastaajalla näytti olevan vaikeuksia tämän tehtävän kanssa.

Koontia havainnoista

Asettamaamme tutkimuskysymykseen ”Millä tavoin luokanopettajaopiskelijat ymmärtävät murtolukujen ja lukusuoran pisteiden välisen vastaavuuden? ei voida vastata yksiselitteisesti. Opettajaksi opiskelevien aineenhallinta vaihtelee melkoisesti tässäkin tutkimassamme rajatussa asiayhteydessä. Tarkasteltaessa osioita yksittäin todetaan, että kuhunkin tehtävään valtaosa opiskelijoista vastasi oikein mutta noin joka neljännellä opiskelijalla oli tehtävien ratkaisuissa puutteita. Kaikkiin kolmeen osioon 5, 8 ja 9 vastasi oikein 52 vastaajaa 96:sta eli vähän yli puolet vastaajista. Lähes joka toiselle vastaajalle tällaisten muunnostehtävien ratkaisu näytti siis kuitenkin tuottavan ainakin jonkin asteisia vaikeuksia. Tutkimuksen näkökulmasta tarkastellen voidaan myös todeta, että tehdyt havainnot osoittavat, että aikuisopiskelijallakin voi olla samantyyppisiä vaikeuksia rationaalilukujen käsittelyssä kuin mitä aiemmissa tutkimuksissa on todettu lapsilla. Aineiston perusteella joillekin opiskelijoille murtolukujen suuruusjärjestykseen asettaminen ei ollut itsestään selvää ja murtolukuja käsiteltiin kokonaislukujen kaltaisesti. Vaikka tämä joukko oli vähäinen, koulutuksessa ilmiö tulisi havaita ja siihen puuttua.

Selvästi aika moni vastaaja ei hahmottanut osioissa annettujen murtolukujen keskinäistä yhteyttä, vaan näytti sijoittaneen lukuja vastaavat pisteet lukusuoralle yksi kerrallaan suhteuttamatta niitä keskenään. Esimerkiksi lukusuoran pisteiden virheellinen sijoittelu osoitti, että useimmat vastaajat eivät käsitelleet osiossa 5 annettuja lukuja $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, $\frac{4}{3}$ ja $1\frac{2}{3}$ kuudesosina.

Siirryttäessä erityisesti symbolisesta murtolukumerkinnästä lukusuoraesitykseen useissa vastauksissa oli havaittavissa että, vaikka lukujen algebralliset suuruussuhteet hahmotettiin, ne eivät siirtyneet lukusuoran geometriseen malliin pisteiden välisten etäisyyksien suhteiksi. Selitys tähän voi olla se, että vastaajat sijoittavat pisteet lukusuoralle ensisijassa lukuarvojen mukaan arvioituihin kohtiin eivätkä niinkään tarkastele osavälien keskinäisiä suhteita murtoluvun osa–kokonaisuus –tulkinnan mukaisesti. Tärkeä havainto oli myös se, että monet vastaajat näyttivät osiossa 9 rajoittavan murtolukumerkinnän vain välille nollasta yhteen. Tarkemman selvityksen ansaitsisi se, esiintyykö joillakin opiskelijoilla osion 9 pistettä S koskeneiden virheellisten ja puuttuvien vastausten mukaisesti käsitys, joiden mukaan murtoluvut ovat aina positiivisia.

POHDINTA

Turun yliopiston opettajankoulutuslaitoksen Turun yksikössä luokanopettajaksi opiskelevien valintakokeeseen kuuluu toisin kuin monissa muissa vastaavissa yksiköissä myös matematiikan ja luonnontieteiden testi. Tällä on osaltaan pyritty varmistamaan se, että luokanopettajakoulutukseen hyväksytyillä opiskelijoilla olisi riittävät perustaidot matemaattis-luonnontieteellisissä aineissa. Kun hakijoiden tiedossa yleensä on, että valintakokeeseen kuuluu tällainen osa, se oletettavasti ohjaa Turun yksikköön hakijoiksi niitä, joita koe ei pelota. Lisäksi yksikön opetuksessa rationaaliluvuilla ja niiden erilaisilla havainnollistamistavoilla on ollut merkittävä rooli monialaisten opintojen kaikille yhteisessä matematiikan kurssissa. Kyselyyn vastanneet opiskelijat olivat opinnoissaan siinä vaiheessa, että he olivat suorittaneet tämän kaikille yhteisen kurssin. Ennakkoon saattoi siis olettaa, että artikkelissa tarkastellut tehtävät olisivat varsin helppoja opiskelijoille. Näin toki useimmille olikin, mutta kuitenkin kussakin kolmessa tehtävässä noin joka neljännellä oli ratkaisussa jonkinasteisia puutteita.

Jos havaitut puutteet olisivat tulleet ilmi peruskursseihin kuuluvissa tenteissä, virheet olisivat laskeneet osaltaan tentistä saatavaa arvosanaa, mutta todennäköisesti tentti olisi tullut hyväksytyksi summatiivisen arvioinnin periaatteiden mukaisesti muun osoitetun osaamisen perusteella ja mitään suurempaa ongelmaa opintojen etenemiseen tästä ei olisi aiheutunut.

Tutkimuksessa esiin tulleet havainnot tulevien opettajien matematiikan aineenhallinnan tasosta asettavat haasteita opettajankoulutukselle. Niistäkin opiskelijoista, joilla on vakavia puutteita matematiikan perustaidoissa ja käsitteissä, tulee koulutuksen myötä opettajia, joiden tulee osata opettaa näitä asioita oikein ja ymmärrettävästi omille oppilailleen. Toimiiko koulutus eettisesti vastuullisesti, jos se ummistaa silmänsä perusaineenhallinnan puutteilta sillä perusteella, että osaaminen on kuitenkin kohtuullisella tasolla? Vai pitäisikö koulutuksessa noudattaa yksittäistenkin perusasioiden osaamattomuuden suhteen ennemminkin nolla-toleranssi –linjaa? Tulevan luokanopettajan on myös itse kannettava vastuunsa siitä, että osaa ja ymmärtää perusasiat, joita työssään varmuudella tulee opettamaan oppilailleen.

LÄHTEET

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bonato, M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: real or integer? *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance*, *33*(6), 1410–1419. http://doi.org/10.1037/0096-1523.33.6.1410

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of the PME and PMENA* (Vol. 3, pp. 17–24). Havaii: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Hannula, M. S., Laine, A., Pehkonen, E., & Kaasila, R. (2010). Rationaalilukujen tiheyden ymmärtämisen kehittyminen luokanopettajaopintojen aikana. In K. Juuti, A. Kallioniemi, P. Seitamaa-Hakkarainen, L. Tainio, & A. Uitto (Eds.), *Ainedidaktiikka moninaistuvassa maailmassa. Ainedidaktiikan symposium 2010.* (pp. 57–69). Helsinki: Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students ′ understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *2*, 317–318.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers ′ Mathematical

Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371–406.

Kurvits, J. (2009). Students' understanding of rational number representations. In M. Lepik (Ed.), *Teaching mathematics: retrospectives and perspectives. Proceedings of the 10th International Conference* (pp. 230–237). Institute of Mathematics And Natural Sciences, Tallinn University.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2014). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, *37*, 14–20. http://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52. http://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*(1), 5–38. http://doi.org/10.1007/BF00163751

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209. http://doi.org/10.1080/07370001003676603

TASK POTENTIAL OF REVERSED EQUATION SOLVING

Dimitri Tuomela

University of Oulu

Reversed Equation Solving (RES) is a task which aims to foster understanding and reasoning above rote-based learning. RES is analyzed with a framework formed by combining two earlier frameworks for analyzing the quality of mathematical tasks. The analysis suggests that conceptual emphasis and high degree of freedom in creating equations for one's peers to solve makes Reversed Equation Solving a cognitively demanding, rewarding and mathematically rich task.

INTRODUCTION

Understanding the process of equation solving is an important but challenging point in learning mathematics (Andrews & Sayers, 2012). Finnish teachers often emphasize routines and procedural fluency in algebra (Attorps, 2006) which is connected to learners' poor conceptual knowledge (Hihnala, 2005) and inability to describe and justify their thinking (Andrews, 2013). Seeing equation solving as a set of memorized routines prevents learners from applying algebra (Hiebert et al., 1997) and building a productive disposition towards mathematics (Andrews, 2013). Apparently there is a strong need for reasoning-centered classroom practices and material in algebra.

Flexible Equation Solving project aims to answer to this need as a part of a 6-year national program (LUMA Suomi). While developing material for this project the author immersed himself in reading previous research describing aspects of high-quality mathematical tasks (e.g. Stein, Grover & Henningsen, 1996; Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons & Shahan, 2013) and aspects of high-quality learning environments for learning mathematics (e.g. Hiebert et al., 1997; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). As a consequence the approach of Reversed Equation Solving (RES) was created and it was used as a one-lesson task in the 10-lesson pilot of Flexible Equation Solving.

Briefly described RES is an intervention where learners create, share, solve and compare equations. The approach is intended to have a positive impact on conceptual understanding related to equation solving and to change answer-orientated classroom practices towards process-oriented ones. The intervention also aims to help teachers reflect on their enacted classroom practices.

This study is a theoretical analysis of the task potential of RES to support the research-based development of the approach. A framework for analyzing the task potential is formed by combining a rubric for analyzing cognitive demand of any task (Smith & Stein, 1998) and a framework describing features of high-quality mathematical tasks (Hiebert et al., 1997). This study can be seen as an initial phase of a design study (Cobb, Jackson & Dunlap, 2015) seeking to establish an optimal instructional design of RES. The aim of this paper is to understand what is the task potential of RES for supporting all learners to develop understanding on mathematical ideas related to equation solving?

THE TASK AND CONTEXT

Reversed Equation Solving has been developed in the context of 10-lesson pilot of Flexible Equation Solving –project. RES is the sixth lesson in the middle of the material. RES was preceded by three conceptually oriented lessons on what are equations and transformations, and two procedurally oriented lessons. On one of those lessons all simple transformations (multiplication, division, addition and subtraction on both sides and modifying an expression) were introduced altogether as a cluster and not one by one as separate lessons which is common in books used in Finnish classrooms.

RES begins by having small groups of 2-5 learners decide a number and marking it equal with a symbol of their choice. Hence they have created a simple equation (e.g. 4 = t). The learners grow their equation with several transformations of their choice (e.g. 6+4 = 6+t) and write these steps above the previous. Once they are satisfied, they share their equation (with their names) in the blackboard for everyone to solve. Gradually as they solve each other's equations they compare their work with the creator group. The written instruction of the task on the pilot was the following.

1. Choose together with your group members a number and mark it equal with some variable. (For example 12 = t)
2. Use transformations of your choice to this equation. (For example multiply both sides by 3. Add 2t to each side and combine like terms.)
3. You have formed an equation. Go share it in the blackboard.

			$36+2t=5t$
		$36+2t=3t+2t$	$36+2t=3t+2t$
	$12\cdot 3=3\cdot t$	$12\cdot 3=3\cdot t$	$12\cdot 3=3\cdot t$
$12=t$	$12=t$	$12=t$	$12=t$

Figure 1. The provided example of transforming the equation.

FRAMEWORK FOR ANALYZING TASK POTENTIAL

Several researchers argue that high-quality mathematics instruction should be based on fewer but more demanding tasks set up in a way that it encourages high-level mathematical thinking and reasoning (Fennema et al., 1996; Stein, Grover & Henningsen, 1996; Jackson, Garrison, Wilson, Gibbons & Shahan, 2013; Henningsen & Stein, 1997).

Smith and Stein (1998) described a four-level (memorization, procedures without connections, procedures with connections, doing mathematics) rubric for analyzing the cognitive demand of tasks. Characteristics of tasks with the highest cognitive demand (doing mathematics) are similar with characteristics of high-quality mathematical tasks described by Hiebert and colleagues (1997). They fit to each other so well that their work could be combined resulting in a 4-dimension framework that describes characteristics of tasks which have the potential to engage students in "doing mathematics" and provide insights into the structure of mathematics. In the following table Smith and Stein's framework will be referred to with (S) and Hiebert and colleagues's framework with (H).

Table 1. Framework for analyzing task potential.

Makes mathematics problematic

- Learners see the task as an interesting problem and see that there is something to find out, something to make sense of (H)
- Learners don't have memorized rules for the task, nor do they perceive there is one right solution method (H)
- Complex and non-algorithmic thinking is required instead of following a prescription (S)
- Considerable cognitive effort is required and the unpredictable nature of the solution process may involve some level of anxiety (S)

Connects with where students are

- Task is accessible to all learners regardless of their mathematical ability (H)
- Opportunities to apply previous skills and knowledge arise (H)
- Students are required to access relevant knowledge and experiences and make appropriate use of them in working through the task (S)

Leaves behind something of mathematical value

- Task engages learners in reflecting important mathematical ideas in a way that leaves behind something of mathematical value (H)
- Task offers opportunities to explore mathematics and reasonable solution methods (H)
- Task requires learners to explore and understand the nature of mathematical concepts, processes, or relationships (S)
- Task requires learners to analyze the task and actively examine task constraints that may limit possible solution strategies and solutions (S)

Demands reflection and regulation

- Task creates opportunities to reflect and communicate (H)
- Task demands self-monitoring or self-regulation of one's own cognitive processes (S)

ANALYZING THE TASK POTENTIAL OF RES

The potential of RES for being a high-quality mathematical task is analyzed against the previously described theoretical framework.

Does RES make mathematics interesting and problematic?

In RES learners create something to think about for their peers and work on each other's creations. This collaborative element coupled with the need to "work backwards" has the potential to make the task interesting and meaningful for the learners. They have considerable freedom in picking the transformations instead of having clear instructions what to do next. Thus they cannot apply any memorized rule for the task and it is very probable that different kind of ideas emerges and groups end up having different kind of equation creation paths. Often learners focus on just getting the right answer which has been found to be related to doing procedures without connections (Henningsen & Stein, 1997). When creating equations the learners cannot focus on getting the correct answer in any other way than checking if their equation is still true with the same value of variable. This unpredictable reverse approach can initially cause anxiety, especially for learners who are used to strictly following instructions and copying the procedures from a similar example. These elements of the task very well correspond to the aspects described in the first dimension "Makes mathematics problematic".

Does RES connect with where learners are?

Although the task may initially seem complex for the learners, they will soon notice that everyone can succeed in the task. When the initial anxiety is overcome the learners have an opportunity to gain a positive experience in doing mathematics as they notice they can do something they thought as difficult. For procedure-oriented learners it can be relieving to see that the process of creating an equation has the following simple steps "choose a transformation, choose a number (unless modifying an expression), execute". This is a straightforward advice teachers can give while leaving room for learners' own reasoning because the way transformations and numbers are chosen effect significantly what kind of conceptual and procedural challenges come forth. The choices learners do effect on the difficulty of the task making it accessible as well as challenging enough for everyone. The nature of the task is such that it affords learners to work on a level suitable for them by deciding how they will create their equation and what kind of equations they choose to solve. All learners need to modify expressions, they need to reflect on the concept of variable and they may start thinking what kind of numbers are they familiar with. All this demands reflection on how their previous knowledge connects to equation solving and requires learners to use their existing skills in a meaningful way. Briefly, RES shows for the learners as a difficult and complex task but turns out to be an achievable task which connects to learners' previous skills regardless of their mathematical ability. This fits well with the second category of the framework ”connects with where learners are”.

Does RES leave behind something of mathematical value?

In RES learners cannot initially focus on the answer which is connected to doing procedures without conceptual reflection according to Henningsen and Stein (1997). Instead the task has the potential to direct learners' attention to creating equivalent equations thus forcing learners to reflect on conceptual ideas relevant in equation solving (adapted from Kieran, 2004):

- seeing relations instead of calculating a numerical answer,
- letters as unknowns and variables,
- reflecting the meaning of equal sign,
- equation as a statement that has a truth-value,
- transformations as a process of changing the equation without changing its truth value,
- operations and their inverses, doing and undoing.

When the learners think about which transformations to use they run into important questions: Why most transformations operate on both sides whereas the transformation of modifying one expression does not? Can we divide if we do not get whole numbers as a result? Can variables be added or subtracted in each side? How about multiplying or dividing by variables? When learners are not in a hurry to get the correct answer they have time to consider these mathematically important questions. The arising mathematical questions and challenges are likely to be different from each other in different groups. This diversity provides a rich ground for learner-driven reflection. Especially considering the question “How can I make the equation as tricky as possible” leads to exploration of new mathematical ideas in a creative manner.

Cuoco, Goldenberg and Mark (1996) described important generic mathematical skills needed to be considered in curricular development and named them as mathematical habits of mind. They described that learners should be pattern sniffers, experimenters, describers, tinkerers, inventors, visualizers, conjecturers and guessers. As tinkerers, learners should develop the habit of taking ideas apart and putting them back together. They should want to see what happens if something is left out or if the pieces are put back in a different way. The open nature of RES creates an opportunity to explore mathematics and practice these generic mathematical habits which can be transferred and applied to multiple contexts. Next, some of these potential opportunities are described.

RES has the potential to have learners trying out different combinations of transformations and numbers to see what happens (Experimenters). They may reflect what happens if they make a small change such as change the order of two transformations or use rational numbers instead of whole numbers (Tinkerers). Is there a general pattern when multiplication follows addition compared to addition following multiplication (Pattern Sniffers)? Learners may conjecture that addition or substraction followed by multiplication or division results in an equation with brackets (Conjecturers). Learners can explore mathematical structure and start generalizing: ”Multiplication and division are somehow similar as well as addition and substraction.” They can invent creative alternatives such as "could I use pi" or "what happens if I add a second variable" (Inventors). Learners can explore important relationships such as finding out how reverse operations are connected to the creation and solving phases (Pattern sniffers). The task has the potential to have learners describing the process of creating and solving equations - what transformations did they use and why (Describers).

Before answering thoroughly to the question if the task leaves behind something of mathematical value it needs to be asked: what is mathematically valuable? One way to answer to this question is to lean on Kilpatrick and colleagues' description of mathematical proficiency comprising five intertwined strands (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001): Conceptual understanding - comprehension of mathematical concepts, operations, and relations; Procedural fluency - skill in carrying out mathematical procedures flexibly, accurately, efficiently, and appropriately; Strategic competence - ability to formulate, represent, and solve mathematical problems; Adaptive reasoning - the capacity for logical thought and for reflection on, explanation of, and justification of mathematical arguments; Productive disposition - habitual inclination to see mathematics as a sensible, useful, and worthwhile subject to be learned, coupled with a belief in the value of diligent work and in one's own efficacy as a doer of mathematics. Developing these strands of mathematical proficiency can be considered as mathematically valuable.

When implementing the task, it is likely that the need for conceptual understanding and procedural fluency alternate in a way which provides opportunities to build a stronger link between conceptual and procedural knowledge of equation solving. The consecutive creation, solving and comparing phases may provide several opportunities to develop adaptive reasoning. Explorative nature of the task may provide opportunities to develop strategic competence through acquiring generic mathematical thinking skills. The task may look difficult but is likely to turn out into manageable task providing positive experiences in doing mathematics thus raising an opportunity to build productive disposition. Therefore, RES seems to have the potential to support the development of mathematical proficiency (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001).

Implementing the task certainly has the potential to have students exploring mathematical structure, ideas, concepts, processes and relationships in a way that leaves behind something of mathematical value.

Does RES demand reflection and regulation?

The novel approach of the task may cause an initial challenge which necessitates perseverance and self-encouragement from the group to start thinking. Unpredictability of the task requires groups to reflect on the task and share their thinking when making suggestions about what to do next. The learners need to collaborate and regulate their work and potentially group members will negotiate some kind of roles. The blackboard filled with student-generated equations offers an excellent chance to wonder if they are mathematically different or similar in structure. Are some equations more difficult than others? If so, why? This kind of negotiation on what counts as mathematically different or more sophisticated has been claimed to develop student autonomy and argumentation in mathematics (Yackel & Cobb, 1996). Especially questions like ″How can we make the equations novel and tricky?″ lead to rich discussions and to mathematically rich reflection. When a group solves an equation from the blackboard and compares their work with the creator group it is common that different kind of approaches, mistakes and misconceptions emerge and require reflection. In these situations learners need to communicate and reflect on each others' work in a productive manner. Definitely RES is a task which has the potential to demand reflection and regulation when it is implemented.

DISCUSSION

Analyzing Reversed Equation Solving against the theoretical framework shows that it has characteristics of high-quality mathematical tasks which have the potential to engage learners in "doing mathematics" and which provide insights into the structure of mathematics. These results can inform the development of an instructional approach which could support learners in the difficult transition (Andrews & Sayers, 2012) from arithmetic to abstract algebra. Design research like this can partly answer to the need for more reasoning-centered classroom practices in algebra. In a broader sense this study contributes to the reflection of student-created tasks as a method for increasing student engagement and creating learning process -oriented classroom culture.

Critique and implications

This study is of theoretical nature and empirical data is needed to understand how elements such as classroom social culture and teacher's role affect on the learning opportunities created when implementing the task. Possibly RES provides more learning opportunities for learners who have previous experience in reasoning about mathematics together and discussing concepts. It needs to be studied how to support learners and teachers in using the task to maximize learning opportunities. Previous research of how to support teachers in using challenging tasks should be adapted to the development of instructional design of RES. For example Sullivan, Mousley & Zevenbergen (2006) argued the following three teacher actions to be relevant in maximizing learning opportunities in heterogeneous classrooms:

> Using open-ended tasks, preparing prompts to support students experiencing difficulty, and posing extension tasks to students who finish the set tasks quickly; as well as actions that address the socio-mathematical goals by making classroom processes explicit.

Stein, Grover and Henningsen (1996) found that five most important factors assisting maintenance of high-level cognitive activity were i) task builds on students' prior knowledge, ii) appropriate amount of time, iii) high-level performance modeled, iv) sustained pressure for explanation and meaning and v) scaffolding. Depending on the learners in the classroom different kind of timing and supportive actions from the teacher is needed during RES. It is challenging for the teacher to make these on-the-fly decisions for example how to use learners work and when to use whole-class discussion. Thus a detailed guide for using RES is needed.

Suggestions for developing Reversed Equation Solving

RES could be developed further by contextualizing the task as an encryption and decryption activity and describing how these skills are increasingly important as data is digitalized and needs to be safely encrypted or how these skills were in a key role in the second world war. Having a secret that needs to be encrypted works as a metaphor of transformations as the the kind of changes to the equation which doesn’t change its truth value (the solution). Encryption and decryption is also similar to the conceptually important idea of operations and their inverses, doing and undoing. Considering the framework for analyzing task potential this addition would make the task more interesting (first dimension) and increase the potential for leaving behind mathematically valuable conceptual understanding (third dimension).

By adding a phrase ”When you are satisfied with your equation, find out which value of variable makes the created equation true. Prove it!” in the instruction sheet before sharing equations in the blackboard would give more opportunities for conceptual reflection. This way it can be checked if the learners understand what stays the same when transformations are used to create equivalent equations (again increasing the task potential in the third dimension). A section in the instruction sheet for classifying the diversity of encountered equations and to reflect on ones own learning could increase the task potential in the forth dimension (demands reflection and regulation). This section would include the following kind of questions: Classify what kind of equations a) exists b) you can create c) you can solve. What kind of methods did you find to make the equation trickier? What similarities and differences you found in creating and solving equations? Did you find some common patterns? Could your findings be generalized?

It should be considered whether the task should be used quickly after introducing transformations thus providing an engaging way to start developing intertwined procedural and conceptual knowledge or later on to launch mathematical exploration and classification of different kind of equations thus providing more room for creativity and opportunities to deepen and summarize knowledge related to equation solving. Alternatively RES could be used as a project combining the previous two approaches. Extending the task from one lesson to a longer period could give more room for mathematical exploration.

CONCLUSION

Conceptual emphasis and the high degree of freedom in Reversed Equation Solving may result in a cognitively demanding but mathematically rich and rewarding implementation of the task. It has potential to engage diverse learners in sharing their reasoning and developing their mathematical proficiency. Using RES as a part of a conceptually oriented set of tasks could ease transitioning from arithmetic to abstract algebra. This study only analyzed the theoretical potential of the task. Naturally the environment it is implemented in, specifically the social culture of the classroom, is likely to have a significant effect on what kind of learning opportunities emerge. It may be a challenging task for the teacher to manage because of its unpredictability and potentially diverse student interactions. It would be important to develop an instructional design of RES which supports teachers and learners in creating fruitful learning opportunities.

REFERENCES

Andrews, P. (2013). Finnish mathematics teaching from a reform perspective: A video-based case study analysis. Comparative Education Review, 57(2), 189-211.

Andrews, P. & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. Journal of Mathematical Behavior, 31, 476-488.

Attorps, I. (2006). Mathematics teachers' conceptions about equations. Dissertation. University of Helsinki.

Cobb, P., Jackson, K., Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition.

Henningsen, M. & Stein, M. K. (1997), Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning, Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 524-549.

Hiebert, J., Carpenter, E., Fennema, K., Fuson, D., Wearne, H., Murray, A. & Olivier, P. (1997). Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding, London: Heinemann.

Hihnala, K. (2005). Laskutehtävien suorittamisesta käsitteiden ymmärtämiseen. Dissertation. University of Jyväskylä. (in Finnish)

Jackson, K., Garrison, A., Wilson, J., Gibbons, L. & Shahan, (2013). Exploring Relationships Between Setting Up Complex Tasks and Opportunities to Learn in concluding Whole-Class Discussions in Middle-Grades Mathematics Instruction. Journal for Research in Mathematics Education, 44(4), 646-682.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). The strands of mathematical proficiency (pp. 115–155). Adding it up: Helping children learn mathematics. Washington, DC: National Academy Press.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3, 344-350.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. A. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. American Educational Research Journal, 33(2), 455–488.

Sullivan, P., Mousley, J. & Zevenbergen R. (2006). Teacher Actions to Maximize Mathematics Learning Opportunities in Heterogeneous Classrooms, International Journal of Science and Mathematics Education, Vol 4(1), 117-143.

Metsämuuronen, J. (2013). Perusopetuksen oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005-2012. Tampere: Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458–477.

KÄSITYKSIÄ MURTOLUKUJEN TIHEYDESTÄ

Anu Tuominen

Turun yliopisto, Turun yksikkö

Maailmalla on tehty paljon tutkimuksia murtolukujen suuruusvertailusta tai laskualgoritmien hallinnasta mutta vähän koskien murtolukujen tiheyden käsitteellistä ymmärtämistä. Tutkimuksessa (N = 209) verrataan keskenään 7.-luokkalaisten, 1. vuoden luokanopettajaopiskelijoiden ja 1. vuoden matematiikan pääaineopiskelijoiden vastauksia kysymykseen "Kuinka monta murtolukua on murtolukujen 2/3 ja 2/4 välissä?".

Luokanopettajaopiskelijoista suurin osa löysi lukujen väliin yhden murtoluvun, seitsemäsluokkalaisista suurin osa löysi "monta" ja matematiikan pääaineopiskelijoista suurin osa löysi äärettömän monta murtolukua. Vastausta perusteltiin useimmiten laventamalla annetut murtoluvut samannimisiksi. Ne vastaajat, jotka hallitsivat murtolukujen tiheys käsitteen, osasivat sujuvasti liikkua rationaalilukujen eri esitysmuotojen; murtolukujen ja desimaalilukujen, välillä.

MURTOLUKUJEN OMINAISUUDET

Murtoluvut, ja laajemmin rationaaliluvut, poikkeavat merkittävästi luonnollisista luvuista, joihin oppilaat ovat tutustuneet koulun ensimmäisiltä luokilta asti. Luonnolliset luvut määrittävät pitkälle sen, mitä oppilaat ajattelevat yleensä luvuista, mitkä luokitellaan luvuiksi, ja mitä ominaisuuksia luvuilla on. (Vamvakoussi, Christou, Mertens & Van Dooren, 2011.) Luonnollisilla luvuilla on seuraaja: luvun 17 jälkeen tulee luku 18 ja niin edelleen, ja luvut saadaan suuruusjärjestykseen luettelemalla (Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Luonnollisista luvuista poiketen murtoluvuilla ei ole seuraajaa, eli ei voida sanoa, mikä luku tulee välittömästi esimerkiksi luvun ½ jälkeen, eikä murtolukuja voi luetella suuruusjärjestyksessä. Oppilaat ovat oppineet, että luonnollisia lukuja kerrottaessa vastaus kasvaa ja jaettaessa vastaus pienenee. Murtoluvulla kerrottaessa vastaus saattaa olla pienempi ($\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$) ja jaettaessa suurempi ($4 : \frac{1}{2} = 8$). Luonnollisilla luvuilla on yksikäsitteinen merkintätapa ilmaisemaan lukua, murtoluvuilla sama luku voidaan esittää vaikka kuinka monella tavalla ($1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \cdots$). (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Bailey, Siegler & Geary, 2014; Gallistel & Gelman, 1992.) Jos oppilas ei ymmärrä edellä esitettyjä eroja luonnollisten lukujen ja murtolukujen välillä, saattaa hän hyödyntää luonnollisten lukujen ominaisuuksia tiedostamattaan. Tätä taipumusta kutsuttiin aluksi kokonaislukujen suosimiseksi (Ni & Zhou, 2005) mutta nyttemmin termi on korjattu luonnollisten lukujen suosimiseksi (Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel & Van Dooren, 2015; Vamvakoussi, 2015).

Murtolukujen keskeisimmät ominaisuudet ovat *suuruus* ja *tiheys*. Luvun suuruusominaisuus yhdistää luonnollisia lukuja, rationaalilukuja ja myöskin reaalilukuja. Äärellinen määrä murtolukuja voidaan järjestää suuruusjärjestykseen ja sijoittaa lukusuoralle (Gallistel & Gelman, 1992). Murtolukujen suuruusvertailutehtävissä oppilaat tukeutuvat usein luonnollisten lukujen ominaisuuksiin ja järjestävät luvut joko nimittäjän tai osoittajan mukaan suuruusjärjestykseen. Harva osaa tulkita murtolukua lukuna ja kiinnittää huomiota osoittajan ja nimittäjän suhteeseen. (Hartnett & Gelman, 1998.)

Tiheys on suuruutta vaikeampi käsite. Vaikka oppilaat ymmärtävät että murtolukuja on erikokoisia, silti he usein mieltävät ne diskreetteinä; murtoluvun $\frac{1}{12}$ jälkeen tulee ensin $\frac{2}{12}$, sitten $\frac{3}{12}$, ja niin edelleen. (Vamvakoussi ym., 2011.) Murtoluvun komponenttien välisen suhteen ymmärtäminen ja taito sijoittaa desimaalilukuja ja murtolukuja lukusuoralle ennustaa hyvää algebran hallintaa (DeWolf, Bassok & Holyoak, 2015; Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015).

Tutkimuksen mukaan oppilaat saattavat ajatella murtolukuja omana lukujoukkonaan ja desimaalilukuja omana lukujoukkonaan. Oppilaat eivät ymmärrä, että kyseessä ovat saman lukujoukon, rationaalilukujen, alkioiden eri esitysmuodot. Oppikirjat saattavat vieläpä tukea tätä harhaa käsittelemällä desimaaliluvut ja murtoluvut toisistaan irrallaan. (Vamvakoussi ym., 2011.) Linkkejä käsitteiden välille ei pääse muodostumaan, tai muodostaminen saattaa olla oppilaalle hankalaa, jos asiat esitetään toisistaan irrallaan ja ajallisesti etäällä. Näin tietorakennetta ei pääse muodostumaan, vaan tieto jää irrallisiksi palasiksi. (Hiebert & Lefevre, 1986, 3–4.)

Murtolukujen suuruusvertailun (Booth & Newton, 2012; DeWolf, ym. 2015;) ja proseduurien (Torbeyns, ym., 2015; Bailey, ym., 2014; Cramer, Post & delMas, 1999) sujuvuutta on tutkittu maailmalla vuosikymmenien ajan mutta murtolukujen tiheyteen liittyviä tutkimuksia on vähemmän (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010, 2012; Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey & Content, 2013). Vamvakoussi ja Vosniadou ovat tutkineet eri-ikäisten koululaisten käsityksiä rationaalilukujen tiheydestä kysymällä ”Kuinka monta lukua on annetulla lukuvälillä 0,005 – 0,006? Annetun lukuvälin päätepisteet olivat joko murtolukuja tai desimaalilukuja. Tyypillisesti oppilaat sijoittivat murtolukuvälille murtolukuja ja desimaalilukuvälille desimaalilukuja. Oppilaat vastasivat desimaalilukuvälitehtävässä useammin, että lukuja on annetulla lukuvälillä äärettömästi, kuin murtolukuvälitehtävässä. Tästä on tulkittavissa se, että oppilaat eivät ymmärrä murtolukujen ja desimaalilukujen esittävän samaa lukua, ja että oppilaat ajattelevat murtolukujen esiintyvän diskreetisti, ei tiheästi. (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010.)

Miten seitsemäsluokkalaiset, tulevat luokanopettajat ja erityisesti matematiikan tulevat asiantuntijat ajattelevat murtolukujen tiheydestä?

TUTKIMUS

Tutkimuksessa tutkittiin, mitä ja miten varsinaissuomalaiset 7.-luokkalaiset (n = 74), Turun yliopiston 1. vuoden luokanopettajaopiskelijat (n = 82) ja 1. vuoden matematiikan pääaineopiskelijat (n = 53) vastaavat kysymykseen ”Kuinka monta murtolukua on murtolukujen $\frac{2}{4}$ ja $\frac{2}{3}$ välissä”. Yläkoululaisille oli annettu valmiit vastausvaihtoehdot (0, 1 tai monta), yliopisto-opiskelijoille ei ollut annettu valmiita vastausvaihtoehtoja.

Oletuksena on, että matematiikan pääaineopiskelijat hallitsevat asian ja tavalla tai toisella ilmaisevat, että annettujen lukujen välissä on vaikka kuinka paljon murtolukuja. Luokanopettajaopiskelijat on seulottu valintakoevaiheessa matemaattisen ja luonnontieteellisen ajattelun testin avulla, joten oletan, että myös tässä ryhmässä suurin osa hallitsee murtoluvut hyvin. Oletuksena on, että kumpikin opiskelijaryhmä menestyy yläkoululaisia paremmin.

Kaikki ryhmät testattiin syksyllä juuri opintojen alettua, yliopisto-opiskelijat ensimmäisillä luennoilla (2014) ja yläkoululaiset ensimmäisillä matematiikan tunneilla (2013) ennen alakoulun kertaamisjaksoa. Yliopisto-opiskelijoiden testissä oli neljä lyhyttä tehtävää, joiden tekemiseen meni noin 5 minuuttia. Seitsemäsluokkalaisten testissä oli kymmenen tehtävää, joiden tekemiseen meni aikaa noin 15 – 20 minuuttia. Osa yläkoululaisista luovutti ja jätti testin loppuosan tehtäviä tyhjäksi; aika ei loppunut kesken, vaan osaaminen. Oppilaiden tuli valita annetuista vastausvaihtoehdoista mielestään paras ja tämän lisäksi perustella vastauksensa. Perusteluksi kelpasi lasku, sanallinen selitys tai piirros. Näin saatiin paremmin informaatiota siitä, miten oppilas ajattelee asiasta ja myös nähtiin kuinka moni vastaajista tukeutuu esimerkiksi laventamiseen. Yliopisto-opiskelijoiden tehtäväpaperissa ei ollut valmiita vastausvaihtoehtoja, mutta heille annettiin samanlainen vastaustila vastausta ja perustelua varten.

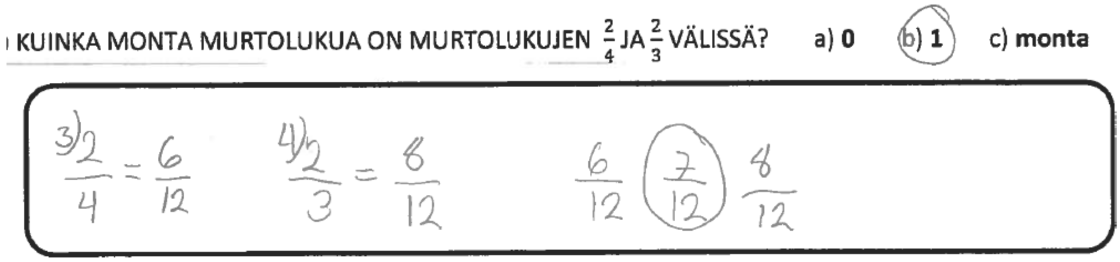
TULOKSET

Suurin osa seitsemäsluokkalaisista löysi jonkun mieleisen vastausvaihtoehdon, vain viisi oppilasta jätti kokonaan vastaamatta tehtävään (taulukko 1). Perustelu jäi kuitenkin monelta oppilaalta kokonaan tyhjäksi (noin 53 %).

Taulukko 1. Seitsemäsluokkalaisten vastausten jakautuminen perusteluineen

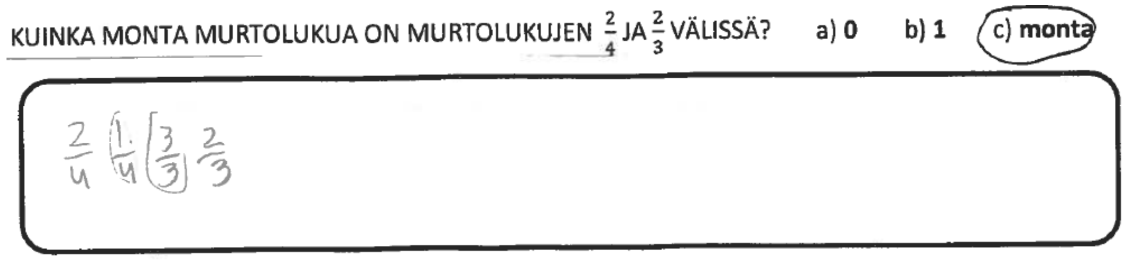
Perustelu	*Tyhjä*	*0*	*1*	*monta*	*YHT*
Tyhjä	5	4	13	17	39
Informatiivisesti tyhjä *"arvasin"*	-	-	-	5	5
Sanallinen selitys	-	5	3	1	9
Piirros	-	-	2	-	2
Laventaa	-	-	7	4	11
Erikoinen	-	-	3	5	8
Yhteensä	5	9	28	32	74
%	7 %	12 %	38 %	43 %	100%

Suosituin vastaus oli "monta". Koska perustelu jäi niin monelta tyhjäksi, on mahdotonta sanoa, onko vastaus onnekas arvaus, vai tietoon pohjautuva. Esimerkiksi osa oppilaista lavensi murtoluvut samannimisiksi saaden luvut $\frac{6}{12}$ ja $\frac{8}{12}$, ja laski lukujen erotuksen, $\frac{2}{12}$. Erotuksesta oppilas päätteli luvun kaksi ja antoi vastaukseksi "monta". Toiseksi suosituin vastaus oli "yksi". Oppilaat perustelivat vastauksensa useimmiten laventamalla annetut murtoluvut samannimisiksi (kuva 1) ja tyytyivät siihen, kun löysivät yhden sopivan murtoluvun. Kukaan ei oivaltanut, että lukujahan voitaisiin laventaa edelleen, ja näin saada yhä pienempiä osia. Laventamista hyödyntäen, diskreetilläkin käsityksellä murtoluvuista, olisi löydettävissä paljon murtolukuja annetulle lukuvälille.



Kuva 1. Oppilaan antama vastaus ja perustelu. Oppilas 25

Seitsemäsluokkalaisten perusteluista löytyi myös mielenkiintoinen virheajattelu (kuva 2). Oppilas luettelee ensin neljäsosia ja jatkaa sitten kolmasosista. Tästä näkee hyvin sen, että oppilas ei ymmärrä, minkä kokoisia murtoluvut ovat ja mitä esimerkiksi luku $\frac{3}{3}$ tarkoittaa. Vastaavia perusteluja oli viisi kappaletta (noin 7 %), joten kyseessä ei ole yksittäinen tapaus.



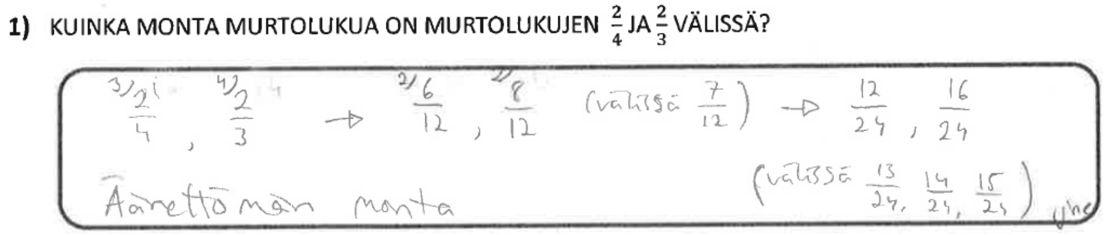
Kuva 2. Oppilaan antama erikoinen perustelu vastukselle ”monta”. Oppilas 22

Yliopisto-opiskelijoille ei ollut annettu valmiita vastausvaihtoehtoja. Odotetusti matematiikan pääaineopiskelijoista (MatO) suurin osa päätyi oikeaan vastaukseen ja perusteli sen sanoin ”ääretön määrä”, LO-opiskelijoiden vastaukset jakautuivat enemmän (taulukko 2).

Taulukko 2. Luokanopettajaopiskelijoiden (LO) ja matematiikan pääaineopiskelijoiden (MatO) vastausten jakautuminen

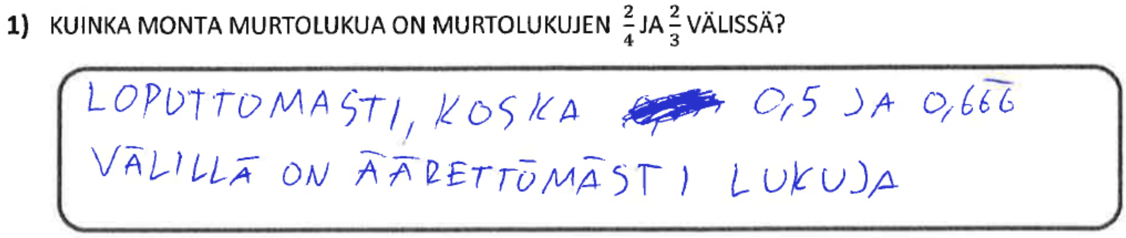
Vastaus		*tyhjä*	*0*	*1*	*2*	*monta*	*∞*	*ei vastausta*	*YHT*
LO	f	1	1	44	14	4	13	5	82
	%	1	1	54	17	5	16	8	100
MatO	f	2	0	4	2	0	45	0	53
	%	4	0	8	4	0	85	0	101

Tutkittaessa tarkemmin LO-opiskelijoiden perusteluja vastaukselle ”monta”, useita strategioita löytyy. Kolme opiskelijaa perusteli vastauksensa kuten kuvassa (kuva 3). Vastauksesta on nähtävissä perustelun nojaaminen diskreettiin ajatteluun: $\frac{12}{24}$ jälkeen tulee $\frac{13}{24}$ ja niin edelleen, vaikka vastaaja päätyykin vastaukseen ”Äärettömän monta”.



Kuva 3. LO-opiskelijan perustelu. Opiskelija nojaa ratkaisussaan diskreettisyyteen. Opiskelija 9

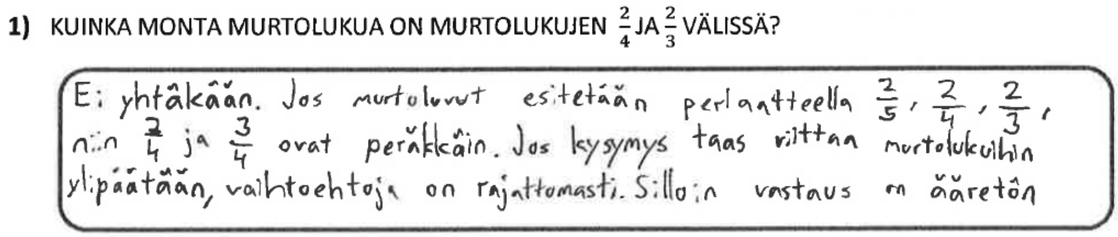
Luokanopettajaopiskelijoista 66 (80,4 %) haki ratkaisua laventamalla vertailtavat murtoluvut samannimisiksi, matematiikan opiskelijoista laventamiseen turvautui vain kuusi opiskelijaa (11,3 %). Vain kaksi LO-opiskelija muunsi luvut desimaalilukumuotoon ja haki ratkaisua sitä kautta (kuva 4), matematiikan opiskelijoista desimaalilukuesitystä hyödynsi neljä opiskelijaa (7,5 %) ja seitsemäsluokkalaisista kukaan ei muuntanut murtolukuja desimaalilukumuotoon.


1) KUINKA MONTA MURTOLUKUA ON MURTOLUKUJEN $\frac{2}{4}$ JA $\frac{2}{3}$ VÄLISSÄ?

LOPUTTOMASTI, KOSKA ~~[illegible]~~ 0,5 JA $0,\overline{666}$ VÄLILLÄ ON ÄÄRETTÖMÄSTI LUKUJA

Kuva 4. LO-opiskelijan perustelu. Opiskelija hyödyntää murtoluvun desimaalilukuesitystä. Opiskelija 57

Kuvan 5 ratkaisussa on havaittavissa synteettinen käsitys. Toisaalta opiskelija nojaa diskreettiin ajatteluun väittäessään, että luvun $\frac{2}{4}$ jälkeen tulee $\frac{3}{4}$, ja toisaalta opiskelija muistaa ehkä kuulleensa, että murtolukuja on ääretön määrä.


1) KUINKA MONTA MURTOLUKUA ON MURTOLUKUJEN $\frac{2}{4}$ JA $\frac{2}{3}$ VÄLISSÄ?

Ei yhtäkään. Jos murtoluvut esitetään periaatteella $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{3}$, niin $\frac{2}{4}$ ja $\frac{3}{4}$ ovat peräkkäin. Jos kysymys taas viittaa murtolukuihin ylipäätään, vaihtoehtoja on rajattomasti. Silloin vastaus on ääretön

Kuva 5. LO-opiskelijan perustelu. Opiskelijalla on synteettinen käsitys. Opiskelija 30

Kun liitetään seitsemäsluokkalaisten tulokset samaan taulukkoon LO- ja MatO-opiskelijoiden kanssa, huomataan samankaltaisuutta luokanopettajaopiskelijoiden ja peruskoululaisten vastausten jakaumissa (taulukko 3). Kun sarakkeet ″0″ ja ″1″, ″monta″ ja ″ ∞″, ja ″tyhjä″ ja ″ei vastausta″ yhdistetään keskenään, LO-opiskelijoiden ja seitsemäsluokkalaisten vastausten jakautuminen on hyvin samansuuntaista. Seitsemäsluokkalaisista osa oli sitä mieltä, ettei annettujen lukujen väliin mahdu yhtään murtolukua. Luokanopettajaopiskelijoista samaan ratkaisuun päätyi onneksi vain yksi opiskelija. Luokanopettajaopiskelijoista yli puolet ehdotti vastaukseksi yhtä, vaikkei vaihtoehtoa ollut tarjolla. Heistä suurin osa perusteli vastauksensa laventamalla murtoluvut samannimisiksi.

Taulukko 3. LO-opiskelijoiden, Mat-opiskelijoiden ja 7.-luokkalaisten vastausten jakautuminen

Vastaus	*7. lk*		*LO*		*MatO*	
	f	%	*f*	%	*f*	%
0 tai 1	37	50,0	45	54	4	7,5
monta tai ∞	31	43,2	31	37,9	47	88,7
ei vastausta tai tyhjä	5	6,8	6	7,3	2	3,8
yhteensä	74	100	82	100,1	53	100,1

POHDINTA

Tutkimuksessa tutkittiin miten hyvin seitsemäsluokkalaiset, 1. vuoden luokanopettajaopiskelijat ja 1. vuoden matematiikan pääaineopiskelijat ymmärtävät murtolukujen (rationaalilukujen) tiheyden. Näyttäisi siltä, että tiheyden ymmärtäminen on hyvin haastavaa, edes kaikki matematiikan pääaineopiskelijat eivät osanneet vastata oikein, vaan osa nojasi selvästi luonnollisten lukujen diskreettiin ominaisuuteen ja seuraaja-ajatteluun: $\frac{6}{12}$ jälkeen tulee $\frac{7}{12}$, ja niin edelleen.

Tehtävän ratkaisemiseksi seitsemäsluokkalaisten ja luokanopettajaopiskelijoiden yleisesti käyttämä strategia oli laventaa vertailtavat luvut keskenään samannimisiksi. Oppilaista kukaan ei keksinyt jatkaa laventamista eteenpäin, vaan oppilaat lopettivat lavennettuaan kerran. Luokanopettajista kolme keksi jatkaa laventamista ja matematiikan opiskelijoista tällaista jatkuvaa laventamista hyödynsi kaksi opiskelijaa.

Seitsemäsluokkalaisista suurin osa valitsi oikean vastausvaihtoehdon ”monta”, mutta heidän perustelunsa jäi useimmiten tyhjäksi. Tällöin vastauksesta ei ole tulkittavissa ymmärrystä murtolukujen tiheydestä. Seitsemäsluokkalaisilla havaittu erikoinen virhekäsitys (kuva 2) voisi johtua tukeutumisesta luonnollisten lukujen luetteluominaisuuteen. Oppilaat ikään kuin luettelevat vähenevästi, ensin neljäsosia ja niiden loputtua, jatkavat seuraavaksi ajattelemistaan osista, tässä tapauksessa kolmasosista.

Monella vastaajalla tehtävän ratkaisu meni väärin siinä, etteivät he ymmärtäneet murtoluvun suuruutta. Jos vastaaja olisi edes pohtinut annettujen murtolukujen desimaalilukuesityksiä, olisi ratkaisu saattanut löytyä. Sujuva liikkuminen rationaalilukujen eri esitysmuotojen välillä näyttäisi olevan eduksi. Matematiikan opiskelijoista neljä perusteli ratkaisuaan nojautuen lukujen desimaalilukuesityksiin, luokanopettajaopiskelijoista näin teki kaksi opiskelijaa ja seitsemäsluokkalaisista desimaalilukuesitykseen ei turvautunut kukaan. Tästä on tulkittavissa se, että murtoluvut ja desimaaliluvut mielletään toisistaan irrallisina lukujoukkoina (Vamvakoussi ym., 2011), ja annettujen murtolukujen väliin etsitään vain murtolukuvastauksia (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). Kuitenkin juuri desimaalilukuvälille oppilaat olivat aikaisemman tutkimuksen mukaan taipuvaisempia hyväksymään äärettömän määrän lukuja (Vamvakoussi & Vosniadou 2010). Kuten viime aikaisissa tutkimuksissa on todettu, taito sijoittaa sekä murtolukuja ja desimaalilukuja lukusuoralle, toisin sanoen ymmärtää näiden lukujen suuruus, ennustaa hyvää algebran hallintaa (DeWolf, ym., 2015; Torbeyns, ym., 2015), mikä onkin havaittavissa matematiikan opiskelijoiden kohdalla.

On huolestuttavaa, että luokanopettajaopiskelijoilla murtolukujen tiheyskäsitys on lähes samalla tasolla 7.-luokkalaisten käsitysten kanssa. Näyttää siltä, että alakoulussa hankittu käsitteellinen tieto murtoluvuista on melko pysyvää. Ne vastaajista, jotka hallitsivat murtolukujen tiheyden, osasivat myös sujuvasti liikkua esitysmuodosta toiseen. Opetuksessa tulisikin kiinnittää huomiota erityisesti murtoluvun suuruuden ja rationaalilukujen eri esitysmuotojen; murtolukujen ja desimaalilukujen, ymmärtämiseen. Vasta murtolukujen suuruuden ymmärtämisen myötä on mahdollista ymmärtää murtolukujen tiheys.

LÄHTEET

Bailey, D., Siegler, R. & Geary, D. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, 17(5), 775–785.

Booth, J. & Newton, K. (2012). Fraction: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology, 37*, 247–253.

Cramer, K., Post, T. & delMas, R. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effect of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2). 111–144.

DeWolf, M., Bassok, M. & Holyoak, K. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contriburion of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology, 133*, 72–84.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B. & Content, A. (2013). A componential view of childrenś difficulties in learning fractions. *Frontier in Psychology, 4*(715), 1–12.

Gallistel, C. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition, 44*, 43–74.

Hartnett, P. & Gelman, R. (1998). Early Understanding of Numbers: Paths or Barriers to the Construction of New Understanding. *Learning and Instruction, 8*(4), 341–374.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (ss. 3–4). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

Ni, Y. & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias Teaching. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52.

Siegler, R., Thompson C. & Schneider. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*, 273–296.

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z. & Siegler, R. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three diffrerent continents. *Learning and Instruction, 37*, 5–13.

Vamvakoussi, X. (2015). The development of rational number knowledge: Old topic, new insights. *Learning and Instruction, 37*, 50-55.

Vamvakoussi, X., Christou, K., Mertens, L. & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dence? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction*, *21*, 676–685.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2012). Bridging the Gap Between the Dense and the Discrete: The Number Line and the "Rubber Line" Bridging Analogy. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 265–284.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction, 28*, 181–209.

Van Hoof, J., Vandewalle, Verschaffel, L. & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction, 37*, 30–38.

MATEMATIIKANOPETTAJIEN NÄKEMYKSIÄ LIITTYEN TEORIAAN, ESIMERKKEIHIN JA HARJOITUSTEHTÄVIIIN

Antti Viholainen, Niko Kuusisto, Mervi Asikainen & Pekka E. Hirvonen

Itä-Suomen yliopisto

Matemaattisen teorian, esimerkkien ja harjoitustehtävien roolit matematiikan opetuksessa ja oppimisessa voidaan nähdä eri tavoin riippuen siitä, millaisista matematiikan luonnetta koskevista näkemyksistä lähtien asiaa katsotaan. Matematiikkanäkemykset voidaan luokitella formalismi-, skeema-, prosessi- ja sovellusorientaatioihin. Tässä tutkimuksessa tutkittiin kyselyn avulla, mitä eri orientaatioiden mukaisia matematiikan oppimisen tavoitteita kokeneet suomalaiset peruskoulun ja lukion matematiikan opettajat (n=52) pitävät tärkeimpinä. Teorian opetuksen suhteen opettajan korostivat formalismiorientaatioon viittaavia tavoitteita, mutta esimerkkien roolin he näkivät melko monipuolisina. Harjoitustehtävien tavoitteiden suhteen opettajien vastauksissa painottui voimakkaasti laskurutiinin hankkiminen.

JOHDANTO

Matemaattinen *teoria*, sitä havainnollistavat, ainakin osittain valmiiksi ratkaistut *esimerkit* ja oppilaiden ratkaistavaksi tarkoitetut *harjoitustehtävät* ovat olennaisia elementtejä erityisesti perinteisessä matematiikan kouluopetuksessa ja oppimateriaaleissa (Reys, Reys & Chavez, 2004; Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson & Zaslavsky, 2006; Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen & Hirvonen, 2015). Opettajan valitsemista opetuksen käytänteistä kuitenkin riippuu, miten näitä elementtejä käytetään opetuksessa. Annetaanko matemaattinen teoria oppilaille valmiina "absoluuttisena totuutena" vai saavatko he itse keksiä ja rakentaa sitä? Käytetäänkö esimerkkejä ensisijaisesti malliratkaisuina, joita jäljittelemällä oppilailla on hyvät mahdollisuudet suoriutua harjoitustehtävistä vai onko tärkeämpää, että esimerkit syventävät oppilaiden ymmärrystä käsiteltävästä asiasta ja aktivoivat heidän omaa pohdintaansa? Entä millä kriteereillä opetuksessa käytettävät harjoitustehtävät valitaan? Nämä opetuksen käytänteisiin liittyvät valinnat riippuvat siitä, millaisiin oppimistavoitteisiin opettaja pyrkii teorian opettamisen, esimerkkien käsittelyn ja harjoitustehtävien teettämisen kautta.

MATEMATIIKKAORIENTAATIOT

Opettajien matematiikan luonnetta koskevat uskomukset ovat tärkeitä, sillä opettajat välittävät niitä oppilaille joko tietoisesti tai tietämättään (Ernest, 1989). Grigutsch, Ratz ja Törner (1998) tutkivat saksalaisten matematiikanopettajien matematiikan luonnetta koskevia uskomuksia ja näkemyksiä. Tutkimuksensa pohjalta he muodostivat neljä erilaista matematiikkaorientaatiota. Näitä orientaatioita ovat myöhemmin soveltaneet ja hieman muokanneet muun muassa Felbrich, Müller ja Blömeke (2008) sekä Viholainen, Asikainen ja Hirvonen (2014) omissa tutkimuksissaan. Viholaisen ja muiden mukaan *skeemaorientaatio* tarkoittaa, että matematiikka nähdään erilaisten sääntöjen, kaavojen ja laskennallisten menetelmien kokoelmana. *Formalismiorientaatiossa* heidän mukaansa matematiikka nähdään staattisena aksiomaattisena järjestelmänä ja *prosessiorientaatiossa* ongelmanratkaisukeskeisen näkemyksen mukaisesti dynaamisena kulttuurisena tuotoksena. *Sovellusorientaatiossa* puolestaan matematiikka nähdään menetelmänä mallintaa reaalimaailman eri ilmiöitä.

Myös Ernest (1989) on aiemmin esittänyt kirjallisuudessa melko paljon käytetyn kategorisoinnin matematiikan luonnetta koskeville näkemyksille. Ernest määrittelee instrumentaalisen, platonistisen ja ongelmanratkaisukeskeisen matematiikkanäkemyksen, jotka vastaavat perusajatukseltaan olennaisesti skeema-, formalismi- ja prosessiorientaatioita. Teoreettisessa mielessä on perusteltua ajatella, että erilaiset matematiikkanäkemykset johtaisivat myös erilaisiin näkemyksiin matematiikan oppimisesta ja opettamisesta. Beswick (2005) päättelee Ernestin luokitusta soveltaen, että mikäli matematiikalle annetaan vain välinearvo ja se nähdään ensisijaisesti sääntöjen, kaavojen ja menetelmien kokoelmana, johtaa se siihen, että matematiikan oppimisessa ja opetuksessa korostuvat muistaminen ja menetelmien proseduraalinen hallinta, mutta syvällisen matemaattisen ymmärtämisen merkitys jää vähemmälle. Jos taas matematiikka nähdään formalismiorientaation tapaan staattisena aksiomaattisena järjestelmänä, on matematiikan oppimisessa keskeistä oppia tuntemaan ja ymmärtämään tämän järjestelmän sisältöä ja rakennetta juuri sellaisena kuin se on ylhäältä käsin annettu. Beswickin mukaan näissä kahdessa näkemyksessä korostuu sisältökeskeisyys matematiikan oppimisessa, mutta jos taas matematiikka nähdään kulttuurillisena konstruktiona, pitäisi sen johtaa matematiikan oppimisessa ja opetuksessa oppijakeskeisyyteen sisältökeskeisyyden sijaan. Tämä tarkoittaa, että oppijan omat ideat ja niiden jalostaminen ja jakaminen muille olisivat keskeisempiä tavoitteita kuin valmiiden tulosten, menetelmien tai tietorakenteiden omaksuminen. Sovellusorientaation näkökulmasta katsottuna matematiikan oppimisen keskeisenä tavoitteena tulisi puolestaan olla reaalimaailman ilmiöiden ja niitä mallintavan matematiikan riippuvuuksien syvällinen ymmärtäminen (Viholainen ym., 2014).

Käytännössä matematiikan oppimista ja opettamista koskevat näkemykset eivät pohjaudu ainakaan eksplisiittisesti matematiikan luonnetta koskeviin ns. epistemologisiin näkemyksiin. Esimerkiksi Viholainen ym. (2014) havaitsivat, että matematiikan yliopisto-opintoja aloittavilla opiskelijoilla on usein matematiikan luonteesta formalismiorientaation mukainen näkemys pelkästään staattisena järjestelmänä. Nisbet ja Warren (2000) ovat havainneet, että myös alaluokkien opettajilla on usein samanlainen näkemys. Aloittavien matematiikan opiskelijoiden näkemykset matematiikan oppimisesta ja opettamisesta olivat kuitenkin paljon monipuolisempia: niissä tuli esiin melko tasapuolisesti kaikkiin orientaatioihin viittaavia elementtejä. Toisaalta matematiikan luonteen syvällinen pohdinta oli monille haastatelluille opiskelijoille melko hankalaa.

MENETELMÄT

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan suomalaisten matematiikanopettajien näkemyksiä matemaattisen teorian opettamiseen, esimerkkien käsittelyyn ja harjoitustehtävien teettämiseen liittyvien käytänteiden harjoituttamista opetustavoitteista. Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, mitä tavoitteita opettajat näkevät näiden opetuskäytänteiden ensisijaisesti harjoituttavan. Tavoitteiden luokittelussa viitekehyksenä käytetään edellä kuvattuja matematiikkaorientaatioita. Siten tulokset heijastavat myös tutkimukseen osallistuneiden opettajien näkemyksiä matematiikasta.

Tutkimuksen aineisto kerättiin sähköistä kyselylomaketta käyttäen. Kyselylomakkeessa esitettiin 12 matematiikan oppimisen tavoitetta. Nämä laadittiin siten, että niistä jokainen oli teoreettisesti liitettävissä johonkin neljästä matematiikkaorientaatiosta. Väittämien luokittelua orientaatioihin ei kuitenkaan esitetty kyselylomakkeessa. Väittämien sisältämät tavoitteet välittyvät myös aineistonkeruuhetkellä voimassa olleista opetussuunnitelmista (Opetushallitus, 2003; Opetushallitus, 2004). Aluksi vastaajia pyydettiin arvioimaan, mitkä listatuista tavoitteista ovat heidän mielestään kaikkein tärkeimpiä yleisesti matematiikan oppimisen kannalta. Vastaajia pyydettiin valitsemaan viisi mielestään tärkeintä tavoitetta. Tämän jälkeen vastaajia pyydettiin arvioimaan, että missä määrin a) matemaattisen teorian opettaminen, b) esimerkkien käsittely ja c) harjoitustehtävien teettäminen harjoituttavat listattuja tavoitteita. Tässäkin vaiheessa vastaajia pyydettiin valitsemaan viisi tavoitetta, joita kukin näistä käytänteistä heidän mielestään eniten harjoituttaa. Vastaajia pyydettiin jokaisessa vaiheessa myös perustelemaan ja kommentoimaan valintojaan.

Pyyntö vastata kyselyyn lähetettiin sähköpostitse noin 400 suomalaiselle matematiikan aineenopettajalle. Pyyntö julkaistiin Matemaattisten aineiden opettajien liiton MAOL ry:n sähköpostitse lähetettävässä viikkotiedotteessa. Tämän lisäksi koulujen opettajille lähetettiin myös henkilökohtaisia sähköposteja. Vastauksia saatiin yhteensä 52 kappaletta. Vastaajista 34 opetti matematiikkaa peruskoulun yläluokilla, 16 lukiossa ja kaksi opetti sekä peruskoulun yläluokilla että lukiossa. Kyselyyn vastanneet opettajat olivat keskimäärin varsin kokeneita: heidän keskimääräinen työkokemuksensa oli 29,5 vuotta. Tämä ei kuitenkaan ollut tarkoituksellista aineistonkeruuvaiheessa.

TULOKSET

Kyselyssä vastaajille esitetyt matematiikan opetuksen tavoitteet ja aineistosta saadut vastaajien valintajakaumat esitettyjen väittämien suhteen on esitetty Taulukossa 1. Tärkeys-sarakkeessa esitetään kuinka suuri prosentuaalinen osuus vastaajista valitsi kysytyn tavoitteen viiden matematiikan opetuksen tärkeimpänä pitämänsä tavoitteen joukkoon. Kolmessa oikeanpuolimmaisessa sarakkeessa esitetään, kuinka suuri osuus vastaajista valitsi kunkin tavoitteen kysyttäessä teorian opettamisen, esimerkkien käsittelyn ja harjoitustehtävien teettämisen harjoituttamaa viittä tärkeintä tavoitetta

Taulukko 1: Kyselyyn vastanneiden (N=52) matematiikanopettajien näkemykset matematiikan opetuksen tavoitteiden tärkeydestä sekä teorian, esimerkkien ja tehtävien tärkeimmistä tavoitteista matematiikan opetuksessa. Kukin vastaaja valitsi viisi tärkeintä tavoitetta.

Tavoite	Tärkeys (%)	Teoria (%)	Esimerkit (%)	Tehtävät (%)
1. Selkeän ja täsmällisen matemaattisen esitystavan omaksuminen (Formalismi)	46	75	77	54
2. Kaavojen, määritelmien ja sääntöjen muistaminen sekä soveltaminen (Skeema)	17	69	48	42
3. Useiden ratkaisumenetelmien keksiminen (Prosessi)	19	38	62	31
4. Jokapäiväisten ongelmien ja tehtävien ratkaiseminen (Sovellus)	65	15	48	42
5. Abstraktin ja loogisen ajattelun edistyminen (Formalismi)	62	81	48	50
6. Laskurutiinin hankkiminen (Skeema)	71	21	48	92
7. Itsenäinen ongelman tutkiminen ja ratkaisun konstruoiminen (Prosessi)	56	31	21	50
8. Arkielämän ja matematiikan välisen yhteyden havaitseminen (Sovellus)	62	31	44	40
9. Matematiikan kokonaisuuden ymmärtäminen (Formalismi)	38	67	29	13
10. Ratkaisumallien muistaminen	2	25	35	48

(Skeema)				
11. Luovuus ja uusien ideoiden keksiminen (Prosessi)	48	33	31	31
12. Matematiikan soveltaminen yhteiskunnan eri aloilla (Sovellus)	13	13	10	6

Seuraavassa Taulukon 1 kunkin sarakkeen tuloksia analysoidaan lyhyesti, ja samalla myös analysoidaan opettajien esittämiä perusteluja eniten kannatusta saaneille tavoitteille. Analyysissa keskitytään niihin perusteluihin, joilla on ilmeinen yhteys johonkin tai joihinkin kyselyssä esitettyihin tavoitteisiin. Sen sijaan esimerkiksi muut luonnehdinnat teorian, esimerkkien ja harjoitustehtävien luonteesta tai roolista sivuutetaan tässä analyysissa. Suoria lainauksia on esitetty esimerkinomaisesti erityisesti niistä vastauksista, jotka tuovat esiin tai selventävät erilaisia perusteluissa esiintyviä näkökulmia. Kukin esitetty lainaus on pyritty liittämään yhteen tai useampaan kyselyssä esitettyyn tavoitteeseen. Tämä on tehty osittain tutkijan tulkinnan perusteella, sillä vastaajat perustelivat yhdellä kertaa viiden eri tavoitteen valintaa (ks. Menetelmät-luku).

Matematiikan opiskelun tavoitteet yleisesti

Yleisesti matematiikan opetuksen suhteen opettajien useimmin viiden tärkeimmän tavoitteen joukkoon valitsema tavoite oli skeemaorientaatioon liitetty laskurutiinin hankkiminen (tavoite 6), jonka valitsi 71 % vastaajista. Myös ns. arkipäivän matematiikkaan liittyvät tavoitteet 4 ja 8 valittiin varsin usein, samoin kuin abstraktin ja loogisen ajattelun kehittyminen (tavoite 5). Sen sijaan muistamista korostavat tavoitteet 2 ja 10 saivat melko vähän kannatusta.

Opettajat perustelivat laskurutiinin hankkimisen (tavoite 6) tärkeyttä vetoamalla mm. ylioppilaskirjoituksiin ja siihen, että laskurutiinin hallinta helpottaa myös muiden tavoitteiden saavuttamista:

> Tietty laskurutiini täytyy olla, jotta kapasiteettia vapautuu myös monimutkaisemmille ongelmille.

Tavoitteita 4 ja 8 perusteltiin esimerkiksi vetoamalla siihen mitä vastaaja uskoi oppilaiden tulevassa elämässään tarvitsevan:

> Harva tarvii derivointia ja muita yksittäisiä juttuja lukion jälkeen, mutta arkeen ja työhön liittyvän matematiikan ymmärtäminen on tärkeetä.

Myös abstraktin ja loogisen ajattelutaidon (tavoite 5) kehittämisen tärkeyttä perusteltiin sen hyödyllisyydellä matematiikan ulkopuolella:

> Kun ajattelun taso on kyllin abstrakti, minkä tahansa asian oppiminen on helppoa. Loogisesta ajattelusta on hyötyä kaikissa asioissa elämän aikana. Se helpottaa myös muiden aineiden oppimista.

Teorian opettamisen harjoittamat tavoitteet

Kysyttäessä matemaattisen teorian opettamisen harjoittamia tavoitteita nousivat formalismiorientaatioon liitetyt tavoitteet 1, 5 ja 9 varsin suosituiksi. On tosin huomattava, että tavoite 5 (abstraktin ja loogisen ajattelun kehittyminen) voitaisiin perustellusti liittää myös ainakin prosessiorientaatioon. Lähes 70 % vastaajista valitsi myös kaavojen, määritelmien ja sääntöjen muistamisen sekä soveltamisen (tavoite 2) vastaustensa joukkoon. Sen sijaan varsin harva vastaaja valitsi matematiikan soveltamisen yhteiskunnan eri aloilla (tavoite 12), jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisen (tavoite 4) tai laskurutiinin hankkimisen (tavoite 6) teorian opettamisen kautta opittavien tavoitteiden joukkoon.

Monet vastaajat pitivät teorian käsittelyä ikään kuin johdantona, jossa esitellään tarvittavat käsitteet ja työkalut. Teoriaan liitettiin myös täsmällisyys ja matemaattiset merkintätavat:

> Teoriaosuudessa määritellään merkinnät, määritelmät ja käsitteiden väliset yhteydet. (tavoitteet 1 ja 9)

Selkeään esitystapaan ohjaa juuri teorian esittäminen esim. taululle.Teorian opettamisen nähtiin tukevan matematiikan tietorakenteen ja käsitteiden välisten suhteiden ymmärtämistä:

> Teoriaosuudet esittelevät myös matematiikan luonnetta loogisesti rakentuvana ja jatkuvasti kehittyvänä tieteenä. (tavoite 9)

> Teoriaosuudessa pitää matematiikkaa esitellä myös kokonaisuutena, jossa eri kurssien osaset tukevat toisiaan. (tavoite 9)

Teorian nähtiin myös tukevan ajattelutaitojen kehittymistä:

> Teoria selkeyttää matematiikassa tarvittavaa loogista ajattelua. (tavoite 5)

Toisaalta teoriaosuuksia pidettiin myös abstrakteina ja oppilaille vaikeina:

> Teorian ymmärtäminen vaatii usein hyvää abstraktia ajattelukykyä. (tavoite 5)

Vastauksissa myös tuotiin esiin, että teorian käsittelyn harjoittaman tavoitteet riippuvat käsittelytavasta:

> Teoriaosuuden esittäminen voi tarkoittaa sitä, että oppilas itse lukee kirjasta tai parhaimmillaan katsoo itse nettivideolta asian ennen kuin alkaa tekemään tehtäviä. […] Jos kyse on opettajajohtoisesta opetuksesta, harjoittuvat todennäköisemmin taidot 2, 6, ja 10, toisessa ääripäässä painottuvat 3. ja 11.

Esimerkkien käsittelyn opettamat tavoitteet

Esimerkkien käsittelyn harjoittamien tavoitteiden suhteen ehdottomasti suosituin valinta vastaajien keskuudessa oli selkeän ja täsmällisen matemaattisen esitystavan omaksuminen (tavoite 1). Toiseksi suosituin oli useiden ratkaisumenetelmien keksiminen (tavoite 3). Muutoin eri tavoitteita valittiin esimerkkien käsittelyn suhteen melko tasaisesti: Tavoite 12 oli ainoa, jonka valitsi alle viidennes vastaajista.

Esimerkkien käsittelyyn liittyvissä kommenteissaan melko monet vastaajat korostivat esimerkkien roolia erityisesti matemaattisen esitystavan oppimisessa:

> Erityisesti merkintöjen opiskeluun esimerkit ovat välttämättömiä, sillä sovittuja tapoja ei opi itse keksimällä. (tavoite 1)

Esimerkeillä nähtiin myös olevan tärkeä rooli oman ajattelun ja työskentelyn ”alkuunpanijana”:

> Esimerkkien avulla voidaan oppilaalle antaa apua, jolla päästään oman ajattelun alkuun. (tavoite 7)

Sen sijaan seuraavissa vastauksessa tuotiin enemmän esille esimerkkien skeemaorientaation mukaista roolia ratkaisumallien tarjoajana:

> Ongelmanratkaisuun annetaan malleja. Mallioppimisen kautta edesautetaan myös laskurutiineja. (tavoite 6)

> Ensimmäisten esimerkkien tarkoitus on usein juuri havainnollistaa esimerkiksi uuden kaavan soveltamista. (tavoite 2)

Useissa vastauksissa kuitenkin korostui, että esimerkkien tehtävänä on lisätä oppilaiden ymmärrystä ja näkemystä opiskeltavasta asiasta muun muassa johdattelemalla uuteen asiaan ja tuomalla esiin erilaisia näkökulmia ja ratkaisutapoja:

> Esimerkeillä on hyvä valottaa erilaisia näkökulmia ja ratkaisutapoja käsiteltävään asiaan. (tavoitteet 3 ja 9)

Muutamissa vastauksissa viitattiin myös siihen, että esimerkit usein käsittelevät käytännön tai arkipäivän ongelmia ja siten havainnollistavat matematiikan soveltamista ja merkitystä:

> Esimerkeissähän lähdetään selvittämään jotain ns. ongelmaa, joka liittyy monesti käytäntöön jollain tavalla. Siihen tarvitaan ratkaisukeinoja. (tavoite 4)

> Esimerkeillä pystytään näyttämään, että millaisia ongelmia opituilla työkaluilla pystytään ratkaisemaan ja miten ratkaiseminen tapahtuu. (tavoitteet 3 ja 8)

Esimerkkien tavoitteita koskevissa perusteluissa esiintyi siis viittauksia kaikkiin orientaatioihin.

Harjoitustehtävien harjoittamat tavoitteet

Laskurutiinin hankkiminen (tavoite 6) oli vastaajien keskuudessa ehdottomasti suosituin valinta kysyttäessä harjoitustehtävien tekemisen harjoittamia tavoitteita. Sen valitsi peräti 92 % vastaajista. Muut tavoitteet, tavoitteita 9 ja 12 lukuun ottamatta, sen sijaan saivat varsin tasaisen vahvaa kannatusta, sillä niiden kaikkien valintaosuus oli välillä 31-54 %.

Myös sanallisissa perusteluissaan monet opettajat korostivat harjoitustehtävien teon tärkeyttä laskurutiinin kehittymisen kannalta:

> Laskurutiinia ei voi saada muutoin kuin ratkaisemalla itse riittävän monta tehtävää. (tavoite 6)
>
> Toistoilla asia jää mieleen ja rutiini muodostuu, siksi valintani kohdistui kohtiin 6 ja 10.

Muutamissa vastauksissa laskurutiinin kehittyminen nähtiin edellytyksenä muiden tavoitteiden saavuttamiselle:

> Tehtävillä haetaan pohjaa matematiikan osaamiselle, se edellyttää mielestäni jonkinlaista rutiinia ja "helppojen" asioiden automatisoitumista. Tämä hoituu osittain tehtävien hinkkaamisen kautta. (tavoite 6)

Vastauksissa myös tuli esiin, että oppikirjoissa olevat tehtävät ovat usein pääasiassa laskurutiinin kehittymistä painottavia:

> Varsinaista luovuutta ja syvällisempää ajattelua vaaditaan monesti vasta vaikeimmissa tehtävissä. Helpoimmat ensimmäiset tehtävät ovat usein kaavamaisia ja laskurutiinia kehittäviä. (tavoitteet 6 ja 11)

Eräs opettaja epäili oppilaidensa kykyä suoriutua muunlaisista kuin laskurutiinia kehittävistä tehtävistä:

> Ilman opettajan ohjausta tehtävien ratkaiseminen on lähinnä laskurutiinin kartuttamista mallin mukaan. Oppilaat eivät opi matemaattista esitystapaa eivätkä ratkaisumenetelmiä, jollei heitä aktiivisesti ohjaa siihen. (tavoitteet 1, 3 ja 6)

Harjoitustehtävien tavoitteisiin liittyvissä perusteluissa tuli siis voimakkaimmin esille skeemaorientaatio.

POHDINTA

Matematiikan opetuksen yleisiä tavoitteita pohtiessaan kyselyyn vastanneet opettajat valitsivat melko tasaisesti kyselyssä listattuja tavoitteita. Myös sanallisissa perusteluissa tuli esiin, että opettajat näkivät matematiikan opetuksen tavoitteet yleisellä tasolla melko monipuolisina. Teorian opettamisen vastaajat kokivat harjoituttavan muita enemmän formalismiorientaatioon liitettyjen oppimistavoitteiden saavuttamista. Sen sijaan esimerkkien roolin vastaajat kokivat monipuolisena ja näkivät niiden harjoituttavan useanlaisia tavoitteita. Harjoitustehtävien suhteen puolestaan korostui selkeästi niiden rooli laskurutiinin harjoituttajana. On huomioitava, että vastaajajoukko oli erityisen kokenutta, joten nuoremmille opettajille tehty kysely saattaisi tuottaa toisenlaisen tuloksen. Lisäksi on syytä huomata, että ainakin lukion matematiikan pitkässä oppimäärässä on hieman erilaiset tavoitteet kuin peruskoulun matematiikassa tai lukion matematiikan lyhyessä oppimäärässä. Mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe olisikin selvittää, miten eri orientaatiot painottuvat eri kouluasteiden matematiikassa. Myös kansainvälinen vertailu eri maiden kesken suuremmilla otoksilla toteutettuna auttaisi näkemään maiden välisiä eroja ja yhtäläisyyksiä painotuksissa.

Prosessi- ja sovellusorientaatioiden mukaisten oppimistavoitteiden voidaan ajatella olevan sopusoinnussa konstruktivististen oppimiskäsitysten kanssa (Beswick, 2005). Skeema- ja formalismiorientaatioita voidaan perustellusti kritisoida siitä, että niissä oppilaan oma luovuus ja omien ideoiden keksiminen eivät painotu. Lisäksi skeemaorientaatiossa asioiden syvällinen ymmärtäminen jää toissijaiseksi tavoitteeksi, ja formalismiorientaation mukaisten tavoitteiden kautta matemaattisesta tiedosta heijastuu helposti objektivistinen kuva. Niinpä voidaan nähdä ongelmallisena, jos matematiikan opetuksessa korostuvat liian voimakkaasti pelkästään skeema- tai formalismiorientaation mukaiset tavoitteet. Kuitenkin on huomattava, että ainakin osaa skeema- ja formalismiorientaatioiden mukaisista oppimistavoitteista voidaan pitää hyvinkin tärkeinä: Esimerkiksi skeemaorientaation korostama proseduraalisten taitojen hallinta liittyy usein läheisesti myös käsitteellisen tiedon hallintaan (Haapasalo & Kadijevich, 2000), eikä myöskään formalismiorientaation korostamia täsmällisen matemaattisen esitystavan hallintaa ja matemaattisten tietorakenteiden ja kokonaisuuksien ymmärtämistä voida missään tapauksessa pitää hyödyttöminä tavoitteina.

Tämän tutkimuksen valossa suomalaisessa matematiikan opetuksessa olisi syytä kiinnittää huomiota toisaalta siihen, että matemaattista teoriaa ei esitettäisi pelkästään valmiiksi annettuna objektiivisena totuutena ja toisaalta siihen, että opetuksessa käytettävät harjoitustehtävät olisivat monipuolisempia siten, että ne harjoituttaisivat myös muita matematiikan oppimiseen liittyviä tavoitteita kuin laskurutiinin kehittymistä. Mm. Pehkonen (2003, 2013) on useissa yhteyksissä painottanut, että matematiikan opetuksessa tulisi rutiinitaitojen harjoittelun sijaan painottaa ajattelutaitoja ja luovuutta. Teorian käsittelyn monipuolistamiseen voisi yksi vaihtoehto olla Hollannissa kehitetty *realistinen matematiikan opetus* (realistic mathematics education), jossa keskeisenä ajatuksena on, että oppilaat ohjatusti konstruoivat matemaattista tietoa reaalimaailman ilmiöiden pohjalta (Gravemeier, 1994; Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). Opetuksessa käytettävien harjoitustehtävien luonteeseen vaikuttavat erityisesti oppimateriaalit (Johansson, 2006; Viholainen, Partanen, Piiroinen, Asikainen & Hirvonen, 2015), joten myös oppimateriaalien laadinnassa eri orientaatioiden painotukset olisi syytä huomioida.

LÄHTEET

Beswick, K. (2005). The belief/practice connection in broadly defined contexts. *Mathematics Education Research Journal, 17*(2), 39–68.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehliková, N. (Eds.) *Proceedings of 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 1, pp. 125-154. Prague: PME.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Teoksessa P. Ernest (Toim.), *Mathematics teaching: the state of the art* (s. 249-253). New York: Falmer.

Felbrich, A., Müller, C. & Blömeke, S. (2008). Epistemological beliefs concerning the nature of mathematics among teacher educators and teacher education students in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 40*, 763–776.

Gravemeier, K.P.E. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education,* Utrecht: Freudenthal Institute.

Haapasalo, L. & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik, 21*(2), 139-157.

Johansson, M. (2006). Textbooks as instruments. Three teachers' way to organize their mathematics lessons. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 11 (3), 5–30.

Nisbet, S. & Warren, E. (2000). Primary school teachers' beliefs relating to mathematics, teaching and assessing mathematics and factors that influence these beliefs. *Mathematics Teacher Education and Development, 2,* 34-47.

Opetushallitus, 2003. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003*. Ladattu osoitteesta http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus (viitattu 14.2.2016).

Opetushallitus, 2004. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Ladattu osoitteesta http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus (viitattu 14.2.2016).

Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu, 21*(6), 35-38.

Pehkonen, E. (2013). Luovuus matematiikassa. *Dimensio, 1*, 48-55.

Reys, B. J., Reys, R. E., & Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*, *61*(5), 61-66.

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Viholainen, A., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. (2014). Mathematics student teachers' epistemological beliefs about the nature of mathematics and the goals of mathematics teaching and learning in the beginning of their studies. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 10*(2), 159-171.

Viholainen, A., Partanen, M., Piiroinen, J., Asikainen, M. & Hirvonen, P. E. (2015). The role of textbooks in Finnish upper secondary school mathematics: theory, examples and exercises. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *20*(3–4), 157–178.

DEFINITIONS OF MEDICATION CALCULATION COMPETENCE OF REGISTERED NURSES: AN INTEGRATIVE REVIEW

Anne Virmajoki & Laura Helle

University of Turku

The aim of this literature review was to examine definitions of medication calculation competence (MCC) based on studies on registered nurses. An integrative method was chosen for the review, summarising both the empirical and theoretical literature for the purpose of understanding medication calculation in terms of the competences involved. A total of 19 studies were included in the review. Based on this review, there is no shared understanding of the definition of MCC. The definitions of MCC found in the literature consist of five elements: 1) abstract thinking; 2) medication calculation from a nursing perspective; 3) mastery of mathematics; 4) equipment; and 5) personal qualities. MCC is a complex and multidimensional application of these elements both in connection with each other and as separate components.

INTRODUCTION

Medication calculation skills are essential for nurses (Fleming, Brady & Malone, 2014). Slight mistakes in calculation can lead to hazardous situations in patient care (Grandell-Niemi, Hupli, Puukka & Leino-Kilpi, 2006; Newton, Moore, Harris & Pittiglio, 2010). In general, the nurse's role is to administer medication based on a doctor's prescription. For this purpose, a nurse needs to be competent in precisely understanding and solving dosage calculation problems based on the prescription. (Grandell-Niemi, 2005; McMullan, Jones & Lea, 2010.)

Recently, according to the study by Sneck in Finland, 32.7 % of registered nurses failed to pass a medication calculation test on their first attempt (Sneck, Saarnio, Isola & Boigu, 2016). Moreover, the study of Sulosaari found that 83 % of Finnish nursing students failed to calculate medication calculation problems correctly 100 % of the time (Sulosaari, Huupponen, Hupli, Puukka, Torniainen & Leino-Kilpi, 2015). These results are similar to the study of Grandell-Niemi (2005) a decade earlier, also in Finland, which found that both nurses and nursing students had difficulties with arithmetical computations and dosage calculations. Earlier studies clearly demonstrated that many nursing students have difficulties learning the mathematics required for professional success (Hunter Revell & McCurry, 2013). Moreover, based on previous studies, it can be seen that nurses lack both the theoretical knowledge and practical calculation skills needed for medication activities (e.g. McMullan et al, 2010; Brady, Malone & Fleming, 2009; Grandell-Niemi et al 2006).

Tilley (2008) has defined nursing competence as the application of the knowledge and skills expected for the role of a nurse in nursing practice. From this perspective, medication administration is a complex activity, involving both theoretical knowledge and medication calculation skills as equal components (Wright, 2012; Fleming et al, 2014; Sneck et al 2016). Sulosaari et al (2015) observe that the results of medication calculation tests in several studies can be difficult to interpret because the components of medication calculation have been mixed. If the definition of the study issue is unclear, it is difficult to follow what has been measured. Moreover, different terms concerning competence have been used as synonyms. This may be one reason why medication calculation in terms of competence has remained unclear. Therefore, medication calculation competence (MCC) needs to be diligently examined to define the indicators of the successful performance of this competence (Wright, 2012; Bagnasco, Galaverna, Aleo, Grugnetti, Rosa & Sasso, 2015).

This paper explores the definitions of MCC of registered nurses as laid out by other researchers or research groups. The data for this definition was collected through a literature review of earlier studies from international databases. An integrative literature review was chosen as the method for the data evaluation and analysis.

AIM

The aim of this literature review is to explore definitions of MCC as a framework for future study and for the purposes of the future demands of medication in both nursing education and practice. The review began by searching for studies concerning medication calculation competence, skills and abilities. The question that guided the literature search was: What kind of knowledge, skills and other qualifications does a nurse need for carrying out medication calculation in nursing practice based on the earlier studies in the literature?

METHODS

An integrative literature review is a method of summarising both the empirical and theoretical literature for the purpose of understanding a specific phenomenon (Whittemore & Knafl, 2005). The purpose is to review, critique and synthesise the representative literature in such a way that new perspectives on the topic are generated (Torraco, 2005). This method was chosen for scrutinising the existing research field on MCC. The review comprises five stages: 1) problem identification; 2) literature search; 3) data evaluation; 4) analysis; and 5) presentation (Whittemore & Knafl, 2005).

Literature search

A computerised search was carried out using in the following databases: Cumulative Index of Nursing and Allied Health Literature (CINAHL), Education Resource Information Centre (ERIC), Finnish Medicine and Health Sciences database (MEDIC), Cochrane Collaboration (COCHRANE), Mathematics Education Database (MATHEDUC), Medical Literature Analysis and Retrieval System Online (MEDLINE) and US National Library of Medicine National Institutes of Health (PUBMED). The following key terms were used: ′competence′ or ′proficiency′ or ′skills′ or ′master′ or ′ability′ or ′knowledge′ AND ′calculation′ or ′math′ or ′numeracy′ AND ′medication′ or ′drug′ or ′drug therapy′ AND ′nursing′. The search was limited to the years 2000–2016. The search included studies in Finnish and in English.

Conduct of the review

The literature search involved the following stages outlined in Figure 1. At the first stage, the computerised search produced 986 references. At the second stage, 757 references were excluded based on their topic of study. The following studies were excluded: 1) studies that focused on medication rather than medication calculation; 2) studies that focused on teaching interventions; 3) studies that focused only on medication errors; 4) position papers not contributing new information; 5) duplicates. At the third stage, from the remaining 229 references, 189 were excluded based on their abstract. Papers were excluded for the same reasons as above. In addition, the following were excluded: 1) pilot studies; 2) reports on medication calculation exams; 3) papers that developed a specific instrument for measuring calculation skills; 4) pretest-posttest interventions; and 5) studies focusing on requirements in a specific context (e.g. cancer medication). These three stages were conducted by one reviewer. At the fourth stage, 40 articles or dissertations were read by two independent reviewers. At this stage, the same exclusion criteria were applied as before. In addition, studies were excluded if: 1) MCC was not defined in any way; 2) the study failed to contribute new spesific knowledge; and 3) the results of the study involved students in early grades of education (only students near graduation were included in the review). Finally, a total of 19 items were selected for inclusion in this review.

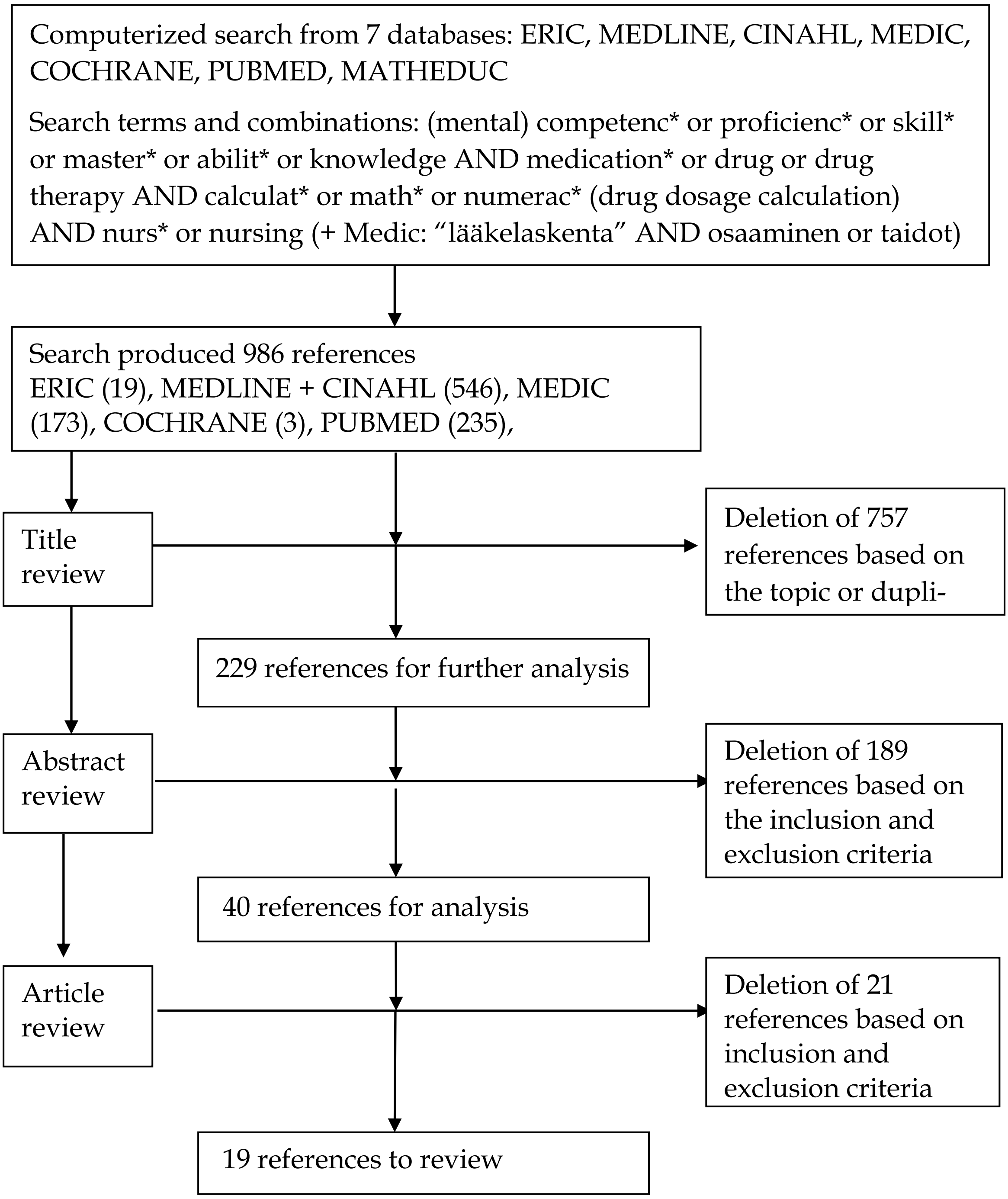


Figure 1. Summary of literature search and articles reviewed at each stage.

ANALYSIS OF THE REVIEWED STUDIES

In the evaluation and analysis stages, the reviewed studies were first analysed based on their methods, study design and research integrity. The review included a total of 19 studies (articles and dissertations) or literature reviews. They were published during 2001–2016, and the authors came from Finland, Italy, the UK, the USA and New Zealand. A total of 5474 nurses or graduating nursing students participated in these studies, and even more (not countable) participated through the literature reviews. The studies were conducted using different research methods: qualitative, quantitative and mixed methods. The studies selected included descriptive, correlational, grounded theory and ethnographic approaches. The data for the studies was collected using questionnaires (n=8), interviews (n=1) and mixed methods (n=5). Five review papers were included in the review.

Second, using an inductive strategy of analysis, the theory and methods sections of each study were examined carefully in order to identify theoretical (explicit and implicit) and operational definitions of MCC relating to competence, proficiency, skills, knowledge and ability in mathematics and/or medication calculation. These identified details (one word, several words, a phrase, a sentence or a description) were assembled together study by study as illustrated in Appendix 1. The parts of text were registered in one table exactly as they were written in the studies so that the information did not change.

Next, the elements of the definitions were coded based on five inductive codes: code 1 included all the units concerning abstract thinking; code 2 included all the pieces of text concerning medication calculation from a nursing perspective; code 3 included all the pieces of text concerning mathematics; code 4 included all the pieces of text concerning equipment; and code 5 included all the pieces of text concerning nurses' personal qualities. As an example of the analysis, the elements of MCC identified in three studies are outlined in Appendix 1.

RESULTS

The 19 studies that were included to this analysis, defined MCC by answering the study question: What kind of knowledge, skills and other qualifications does a nurse need for carrying out medication calculation in nursing practice based on the earlier studies in the literature? The coding scheme is presented in detail in Appendix 2.

Out of the studies, 15 discussed MCC from the perspective of mathematics. Three studies examined MCC from the perspective of medication. One study examined MCC from the perspective of medication errors. All the studies agreed that the role of medication calculation was an important part of a safety-critical context and that practice-based MCC is essential for the nursing profession and needs to be highly regulated. MCC involves

> the need to undertake appropriate arithmetical operations and computations to calculate a numerical value that falls within an appropriate degree of accuracy for the required dose or rate (Young, Weeks & Hutton, 2013, p. 16).

In addition, it was particularly challenging to find explicit definitions of MCC in the studies. The knowledge and skills required for medication calculation tended to be described through consideration of: 1) mathematics tests; 2) the requirements of the vocation; 3) errors and difficulties in medication calculation; and 4) the understanding of spesific phenomena such as anxiety or conceptual understanding. We highly agree with Sulosaari's (Sulosaari et al 2015) observation: the study results are difficult to interpret because of the lack of the definitions of the components that have been measured.

According to our analysis, the largest understanding between the authors was about basic mathematics skills and the importance of them as a part of MCC. Basic mathematics like addition, subtraction, multiplication and division with whole numbers, fractions and decimal numbers are the mathematical operations needed in medication calculation according to the 12 studies of this review. Moreover, mentioned in several studies, conversion between units and understanding calculation with percentages are the basis of mathematical skills in medication calculation. However, based on our analysis, mathematical tests are a narrow point of view to evaluate MCC. The tests can ignore other components of MCC such as mathematical thinking and equipment.

Moreover, according to our analysis, most of the authors of the analysed studies share the understanding that drug calculation includes dosage calculations, complex dosage calculation, diluting and solutions and calculations with flow rates. However, these elements were not defined or described carefully in every analysed study. Knowledge and ability to use medical devises and instruments is thoroughly a part of dosage calculation. The practical perspective of MCC emphasizes through this ability of qualifying with the equipment of medication. There seems to be a consensus between the authors of the analysed studies that both nurses and nursing students have difficulties to connect theoretical knowledge to practical skills.

The greatest difference between the studies, according to our understanding, was the definitions of the abstract factors of MCC, such as conceptual thinking, problem solving, reasoning, interpretation and representation. Some studies concentrated in concerning MCC as a perspective of mathematical thinking, as our analysis condenses these identified abstract factors, and they analysed one component rigorously, but mainly without defining MCC first. In one accurate investigation of problem solving MCC was discussed as a widely recognized phenomenon.

Moreover, according to the several analysed studies, there seems to be nurses' personal qualities affecting MCC and especially affecting how the competence is performed in clinical practice. These personal qualities have been described unclearly in most of the analysed studies and this results easily in confusion and misunderstanding, if the personal factors are correlates or effecting MCC or just the background factors of nurses in the study.

Altogether, according to our analysis, there was no shared understanding of the definition of MCC. The separate elements of MCC were identified in the studies but the definition of MCC remained unclear. Based on this literature review, it appears almost impossible to deal with all the elements of MCC at the same time. For this reason, it is extremely important to define carefully what the subject of a study is.

CONCLUSION

Our study highlights two issues: 1) most authors seem to take the definition of MCC for granted as explicit theoretical definitions of MCC are scarce in the literature; 2) there is no shared understanding of the definition of MCC.

Our analysis indicated that the definitions of MCC found in the literature consist of five elements: 1) abstract thinking; 2) medication calculation from a nursing perspective; 3) mastery of mathematics; 4) equipment; and 5) personal qualities. It is important to note that different researchers and research groups stressed different elements.

To our understanding, MCC is a complex and multidimensional application of several attributes both in connection with each other and as separate components. Competence in vocational mathematics is about the ability to address and handle mathematics in the context of nursing. Competence in mathematical thinking is a crucial element for understanding mathematics and being able to make progress in handling medication calculations. Personal factors enable nurses to utilise their mathematical and vocational competences in medication activity to ensure patient safety and the accuracy of medication (Figure 2).

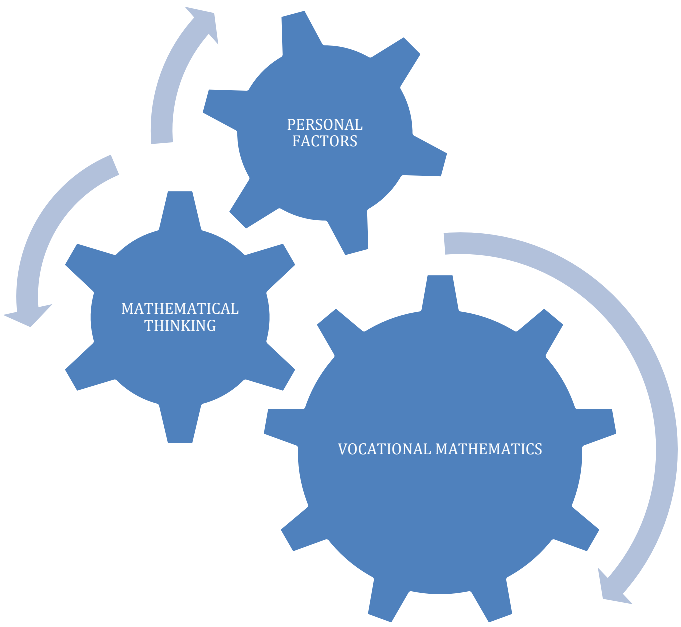


Figure 2. Medication calculation competence

REFERENCES

Brady, A-M., Malone, A-M. &Fleming, S. (2009). A literature review of the individual and systems factors that contribute to medication errors in nursing practice. *Journal of nursing management* *17*(6), 679–697.

Grandell-Niemi, H. (2005). The Medication Calculation Skills of Nursing Students and Nurses. Developing a Medication Calculation Skills Test. *Dissertation*. Doctor of Nursing Science. University of Turku, Finland: Painosalama OY.

Hunter Revell, S.M. and McCurry, M.K. (2013). Effective pedagogies for teaching math to nursing students: A literature review. *Nurse Education Today 33*(11), 1352-1356.

Newton, S., Moore, G., Harris, M. & Pittiglio, L. (2010). The effect of context on Nursing Student Math Aptitude. *Journal of Professional Nursing 26*(6), 341–345.

Tilley, D. (2008). Competency in Nursing: A Concept Analysis. *The Journal of Continuing Education in Nursing 39*(2), 58–64.

Torraco, RJ. (2005). Writing integrative literature reviews: Guidelines and examples. *Human resource development review* 4 (3), 356–367.

Whittemore, R. & Knafl, K. (2005). The integrative review: updated methodology. *Journal of Advanced Nursing* 52 (5), 546–53.

Wright, K. (2012) The assessment of drug calculation skills - Time to rethink the whole process. Nurse Education Today 32, 341-344.

Review articles:

Bagnasco, AM., Galaverna, L., Aleo, G., Grugnetti, A., Rosa, F. & Sasso, L. (2015). Mathematical calculation skills required for drug administration in undergraduate nursing students to ensure patient safety: A descriptive study. Drug calculation skills in nursing students. *Nurse Education in Practice 24*, 1–7.

Coben, D. & Weeks, K. (2014). Meeting the mathematical demands of the safety-critical workplace: Medication dosage calculation problem-solving for nursing. *Educational Studies in Mathematics 86*(2), 253–270.

Fleming, S., Brady, A-M. & Malone, A-M. (2014). An evaluation of the drug calculation skills of registered nurses. *Nurse Education in Practice 14*(1), 55–61.

Grandell-Niemi, H., Hupli, M. & Leino-Kilpi, H. (2001). Medication Calculation Skills of Graduating Nursing Students in Finland. *Advances in Health Sciences Education 6*, 15–24.

Grandell-Niemi, H., Hupli, M., Leino-Kilpi, H. & Puukka, P. (2003). Medication calculation skills of nurses in Finland. *Journal of Clinical Nursing 12*, 519–528.

Grandell-Niemi, H., Hupli, M., Puukka, P. & Leino-Kilpi, H. (2006). Finnish nurses' and nursing students' mathematical skills. *Nurse Education Today 26*, 151–161.

Hoyles, C., Noss, R. & Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematical Education 32*(1), 4–27.

Jones, SW: (2009). Reducing medication administration errors in nursing practice. *Nursing Standard 23*(50), 40–46.

Macdonald, K., Weeks, K. & Moseley, L. (2013). Safety in numbers 6: Tracking pre-registration nursing students' cognitive and functional competence development in medication dosage calculation problem solving: The role of authentic learning and diagnostic assessment environments. *Nurse Education in Practice 13*, 66–77.

McMullan, M., Jones, R. & Lea, S. (2010). Patient safety: numerical skills and drug calculation abilities of nursing students and registered Nurses. *Journal of Advanced Nursing 66*(4), 891–899.

Melius, J. (2012). Mathematics anxiety and mathematics self-efficacy in relation to medication calculation performance in nurses. *Dissertation*. Doctor of Education, University of North Texas, USA: ProQuest.

Mills, S. (2012). A grounded theory of the process of conceptual understanding in baccalaureate nursing students learning medication calculations. *Dissertation*. Doctor of Philosophy. Widener University, USA: ProQuest.

Pyo, K. (2011). Undergraduate nursing students' perceptions regarding factors that affect math abilities. *Dissertation*. Doctor of Philosophy. Robert Morris University, USA: ProQuest.

Sneck, S., Saarnio, R., Isola, A. & Boigu, R. (2016). Medication competency of nurses according to theoretical and drug calculation online exams: A descriptive correlational study. *Nurse Education Today 36*, 195–201.

Sulosaari, V., Huupponen, R., Hupli, M., Puukka, P., Torniainen, K. & Leino-Kilpi, H. (2015). Factors associated with nursing students' medication competence at the beginning and end of their education. *BMC Medical Education 15*, 223–234.

Sulosaari, V., Suhonen, R. & Leino-Kilpi, H. (2010). An integrative review of the literature on registered nurses' medication competence. *Journal of Clinical Nursing 20*(3/4), 464–478.

Weeks, K., Hutton, M., Young, S., Coben, D., Clochesy, J. & Pontin, D. (2013a). Safety in numbers 2: Competency modelling and diagnostic error assessment in medication dosage calculation problem-solving. *Nurse Education in Practice 13*, 23–32.

Weeks, K., Higginson, R., Clochesy, J. & Coben, D. (2013b). Safety in Numbers 7: veni, vidi, duci: A grounded theory evaluation of nursing students' medication dosage calculation problem-solving schemata construction. *Nurse Education in Practice 13*, 78–87.

Young, S., Weeks, K. & Hutton, M. (2013). Safety in numbers 1: Essential numerical and scientific principles underpinning medication dose calculation. *Nurse Education in Practice 13*, 11–22.

APPENDIX 1. THREE EXAMPLES OF INDUCTIVE ANALYSIS OF THE STUDIES

Grandell-Niemi *et al.* (2006)	
Theoretical definition	Operational definition
”In this study, the term basic level (BL) mathematical skills was used to refer to basic arithmetic (e.g. addition, subtraction, multiplication, division) and higher level (HL) skills refer to conversions, percentages, Roman and Arabian figures, estimation and dosage calculations.” “Pirie (1987) identified the mathematical areas essential and needed in nursing: addition, subtraction, multiplication and division with whole numbers, fractions, decimals, ratios, percentage, conversions and problem-solving. These areas are usually included in medication or dosage calculation tests.” intravenous calculations “It is important to connect calculation competency to the ability to give medication in clinical practice.” “It is found that level ‘A’ (upper secondary level) in mathematics is a good predictor of mathematical performance.” “Educational background, mathematical training and an excellent mark (9–10) in mathematics (upper secondary school) were connected with higher test scores in mathematical tests as well as students’ self-confidence with their mathematical skills.”	“Finding suggests that when the participants have earlier positive experiences of success in mathematics, they also have confidence in their mathematical skills in clinical practice.” “Estimation of a sensible amount was found difficult. It is very important that everyone dealing with medications has an idea beforehand of what might be a sensible amount.” “Calculations of solutions belong to critical skills which are needed when ready-made doses are not available. Nurses commented spontaneously on the test that they would not perform such calculations alone in which they were unsure of their skills and would ask for help of colleagues.” “The study results showed that a sense of sufficient skills in mathematics, earlier good mathematical performance, calculations of dosages at work and little use of ready-made doses were associated with high test scores and predicted a good performance on the MCS Test in both groups.” From test: nurses mean score was 22,7 (maximum score= 29), 9 nurses (n=364) answered all problems correctly and 71 % of nurses attained a score of 86%
Bagnasco *et al.* (2015)	
Theoretical definition	Methodological definition
“Nurses need adequate medication calculation skills to provide safe and effective drug administration and management, which is an important component of the nursing profession.” “Drug preparation phases include procedures that are potentially subject to errors: the reconstitution of drugs, titration, preparation of solutions, and the calculations made to fraction	“The hardest section for the students was the one on the multiplication of fractions” “The lack of knowledge about maths principles in students entails difficulties performing maths calculations, and urge the need to bridge the theory practice gap.” “Of all the students, 22% (n ¼ 155) declared that they had difficulty doing

drugs." "Many nurses and students do not have a full understanding of all the basic mathematical concepts (addition, subtraction, division, and multiplication) and are unable to apply these concepts to medication dosage calculation and use formulas." "Nurses have major difficulties with percent-ages, fractions, and equivalences." "The validity of written tests, as a measure of the drug calculation skills in clinical settings, has been questioned, and the risk of supposing that poor outcomes imply poor clinical competences has also been highlighted in literature." "Calculating drug dosages (whether basic calculation skills, logics, deduction, reasoning, and understanding advanced formulas)" "Section A focused on the basic maths skills and included the first 4 areas: Area 1: calculations with percentages Area 2: multiplying fractions Area 3: calculations with fractions Area 4: divisions and multiplications by 10, 100, and 1000 Section B instead focused on maths calculation skills applied to medication administration, which used medication prescriptions selected from real clinical practice settings, and included: Area 5: Calculations with proportions Area 6: Solving problems on how to calculate medication dosages and solution infusion speeds."	calculations without a calculator." "Drug calculations require complex maths skills (calculation skills, logics, deduction, reasoning and understanding)." "Students found it very difficult to reduce fractions and transform them into decimals." "This showed that the most common difficulties for the students were interpretation of information, conversion of units of measure, and the conceptuali-sation of calculations." "Maths skills are not learned once for all, but need to be refreshed over time, and require constant exercise and application of the maths rules and principles in order to be kept up." Knowledge of basic maths principles "It is clear that maths skills to calculate the right dose of a drug are essential for nurses and patients' safety is at risk if nurses are unable to make precise calculations."
Sneck *et al.* (2016)	
Theoretical definition	Operational definition
"Drug calculation is also a crucial skill as one mistake in calculation can lead to a fatal medication error." "In the literature, medication competence is defined as a complex combination of knowledge, skills, performance, values, attitudes, and decision-making competence." "Medication competence does not increase linearly but involves a more complex and individual process." "The drug calculation exam contains three questions. To pass the exam nurses need to	"The scores of male nurses in the drug calculation exam were better than female nurses' scores. The age of respondent at the time of answering correlated significantly with the scores, i.e. younger nurses had better scores than older nurses." > "Age correlated with the results of drug calculation skills. Younger nurses had significantly better skills than their older colleagues." "Acute care unit nurses had better scores in drug calculations than nurses in the

complete 100% of the drug calculations correctly. " Drug calculation: Basic arithmetic and conversions, Basic dosage calculations, Complex dosage calculation, Diluting and solutions, Flow rates.	other units." > As in the theoretical competence, also in the drug calculation results, there was a correlation with work unit. The more the nurses implement complex medication in their daily work, the better they do in the drug calculation exam. Especially in the most challenging flow rate and dilution calculations there were significant differences between work units. Acute care unit nurses mastered the most difficult calculations better than the other nurses." Basic arithmetic and conversions Basic dosage calculations Complex dosage calculation Diluting and solutions Flow rates "The number of attempts and the use of time could be used as triggers to identify the nurses who struggle with drug calculations, and early intervention could be introduced." "Medication administration is a complex procedure where theoretical knowledge and drug calculation skills act as equally important areas of competence." "According to this study theoretical knowledge and drug calculations skills have positive correlation."

Explanation of the colors:

1) Units concerning abstract factors

2) Units concerning medication calculation from nursing perspective

3) Units concerning mathematics

4) Units concerning equipment

5) Units concerning nurses personal qualifies

APPENDIX 2. THE UNITS, SUBCATEGORIES AND CATEGORIES OF MCC

Grouping of the units	Subcategory	Category
Units concerning abstract factors		
Conceptual thinking involves different processes: a combination of confusion, anxiety, motivation, self-efficacy and confidence towards problem solving ability and making sense of the increasingly complex problems. (Mills 2012)	Conceptual thinking	MATHEMATICAL THINKING COMPETENCE
Conceptual thinking (Fleming et al 2014; McMullan et al 2009)		
Conceptual competence = understanding the medication dosage problem to be solved (Young et al 2013; Macdonald et al 2013)		
Conceptual competence = Understand the elements of prescription and other word-based medication forms and to extract the numerical information necessary to set up the dosage problem correctly (Weeks et al 2013a; Weeks et al 2013b)		
Conceptual knowledge (Hoyles et al 2001)		
Conceptual skills: ability to convert between measurement systems and to formulate a dosage problem (Grandell-Niemi et al 2003)		
Nurses need to be able to conceptualise clinical information for the actual task of calculation (Sulosaari et al 2010)		
Conceptualisation (Bagnasco et al 2015; Pyo 2011)		
Interpretation (Fleming et al 2014; McMullan et al 2009)	Interpretation and representation	
Drug preparation = finding doses from prescriptions, drug concentrations,		

changing dose frequencies (Hoyles et al 2001) To interpret numerical information from prescription charts and ampoule labels (Coben & Weeks 2014) Infusion management = coordination of infusion rates, checking concentrations (Young et al 2013) Fluid-balance monitoring = measuring hourly fluid intake and output, recording, updating and interpreting fluid-balance charts (Young et al 2013) Vital-signs and laboratory-data interpretation = measuring blood pressure, temperature etc., recording on-time series graphs with different scales, interpreting laboratory-report data (Young et al 2013) Understanding and interpreting clinical information, interpretation of information (Bagnasco et al 2015) Use of formulae, tables and graphs (Young et al 2013) Recognition of incidences (blood results) (Young et al 2013) Estimation (Young et al 2013; Sulosaari et al 2010)		
To perform medication calculation correctly means having good problem solving skills (Sulosaari et al 2010) Problem solving involves cognitive (knowing that and why) and functional (know-how and skills) competencies (Macdonald et al 2013) Problem solving is a combination of conceptualization, calculation and technical measurement. (Weeks et al 2013a; Weeks et al 2013b)	Problem solving	
Proportional reasoning > the nursing rule	Reasoning	

> a general and consistent procedural approach (Hoyles et al 2001) Reasoning (Bagnasco et al 2015) Logics and deduction (Bagnasco et al 2015)		
Units concerning mathematics	Numeracy	COMPETENCE OF VOCATIONAL MATHEMATICS
Numeracy (Jones 2009) Numeracy = to be competent, confident and comfortable with one's judgments on whether to use mathematics in a particular situation and if so, what mathematics to use, how to do it, what degree of accuracy is appropriate, and what the answer means in relation to context. (Young et al 2013; Coben & Weeks 2014) Numerical abilities (McMullan et al 2009)		
Knowledge of basic math principles (Bagnasco et al 2015) Mathematical skills (Sulosaari et al 2010)	Basic arithmetic	
Addition, subtraction, multiplication, division (Young et al 2013; Grandell-Niemi 2006) Multiplication, division by 10, 100, 1000 (Bagnasco et al 2015) Arithmetical skills: ability to add, subtract, multiply and divide (Grandell-Niemi et al 2003) Arithmetic skills(Sneck et al 2016) Basic arithmetic operations: addition, subtraction, multiplication and division of whole numbers, fractions and decimals (Sulosaari et al 2010; Grandell- Niemi 2006; Bagnasco et al 2015) Use of fractions and decimals and negative numbers (Young et al 2013; Sulosaari et al 2010; Bagnasco et al 2015)		

Roman and Arabic numbers (Sulosaari et al 2010) Percentages (Sulosaari et al 2010, Bagnasco et al 2015; McMullan et al 2009) Understanding percentages, ratios (Young et al 2013) Ratios (Hoyles et al 2001) Proportions (Bagnasco et al 2015) Complex math skills (Bagnasco et al 2015; Coben & Weeks 2014)		
Use of the International Unit system (Young et al 2013) SI-unit conversion (Coben & Weeks 2014; Macdonald et al 2013) Unit doses (Macdonald et al 2013) Sub and multiple unit doses (Macdonald et al 2013) Metric conversions (Fleming et al 2014) Conversion between units (Young et al 2013; Bagnasco et al 2015) Conversions (Sneck et al 2016; Sulosaari et al 2010; Bagnasco et al 2015) Transformation (Hoyles et al 2001) Sub- and multiple-unit dose (Coben & Weeks 2014)		
Units concerning medication calculation from nursing perspective	Dosage calculation	
Tablet dosages (Fleming et al 2014; Coben & Weeks 2014) Calculate the correct number of tablets (Jones 2009; Macdonald et al 2013) Drug dosage calculation and administration the most common application of mathematical ability and skill (Fleming et al 2014)		

Dosage calculation skills (Grandell-Niemi 2003) Calculation competence = computation of an accurate numerical value for the dose to be administered (Young et al 2013) Calculation competence = correctly apply arithmetical operations and compute an accurate numerical value within a safe and acceptable tolerance range for the prescribed medication dose (Weeks et al 2013; Macdonald et al 2013) Basic dosage/drug calculations 100 % correctly (Sneck et al 2016) Calculation of dosages (Sulosaari et al 2010) Dose for a drug (Jones 2009) Drug dosages (Bagnasco et al 2015) Diluting and solutions (Sneck et al 2016) Calculation of solutions (Grandell- Niemi 2006) Solid and liquid drugs (Sulosaari et al 2010; McMullan et al 2009) Preparing liquids (Sulosaari et al 2010) Calculate the correct fluid (Jones 2009) Fluid dosages (Fleming et al 2014) Basic calculation with liquid medicines and injections (Coben & Weeks 2014; McMullan et al 2009; Macdonald et al 2013)		
Drip rates (Fleming et al 2014) Flow rates (Sneck et al 2016) Calculating infusion time (Sulosaari et al 2010) Calculate the correct volume (Jones 2009) Infusion speed of solutions (Bagnasco et al 2015)	Calculation of infusions	

Intravenous calculations (Grandell-Niemi 2006) IV-infusions (Coben & Weeks 2014; Macdonald et al 2013) Infusion rates (McMullan et al 2009)		
BMI-calculation, body mass index calculation (Young et al 2013) Appreciation of statistics, budgeting and basic bookkeeping (Young et al 2013) Clinical pharmacokinetics > ADME = absorption + distribution + metabolism + excretion (Young et al 2013) Pharmacological skills: knowledge of terminology, pharmacological actions and effects of medicines, delivery routes of medicines, different forms of medicines and pharmacokinetics (Grandell-Niemi et al 2003) Pharmacological skills are a part of medication calculation skills (Sulosaari et al 2010)	Components spesific to the context of nursing	
Drug calculations for children and other specific groups (Coben & Weeks 2014) Complex dosage calculations (Sneck et al 2016)	Complex dosage calculation > Components spesific to the context of nursing	
Double-checking the medication administration by two nurses: helps ensuring that calculation is correct. (Jones 2009) Intravenous-drug administration which 2 nurses were involved > dialogues (Hoyles et al 2001) Clinical judgment as thinking and communicating with other professionals accessing available resources (such as using drug formularies and information	Communicating	

leaflets) and e.g. patient medication timing. (Jones 2009) Ask for help of colleagues if unsure of one's skills (Grandell-Niemi 2006)		
Units concerning equipment		
Use of medication equipment, e.g. infusion pumps (Fleming et al 2014; Coben & Weeks 2014; McMullan et al 2009) Technical measurement competence = accurate measurement of the medication dose and/or rate of administration (Young et al 2013) = select an appropriate medication administration vehicle. Accurately transform the calculated numerical value to the context of the measurement device and measure the correct dose of prescribed medication or administer the correct rate of prescribed IV infusion fluid. (Weeks et al 2013a; Macdonald et al 2013) Measurement (fluid balance, vital signs, preparing/drawing up and dispensing medicines) (Young et al 2013) To perform an accurate technical measurement of a dose in an appropriately selected measurement vehicle (like a syringe of an appropriate design and volume) (Coben & Weeks 2014)	(Medication) equipment	
Using/not using calculator (Sulosaari et al 2015; McMullan et al 2009; Bagnasco et al 2015)	Calculator > equipment	
Units concerning nurses personal qualifies		
Age: the younger, the better in arithmetic (Grandell-Niemi et al 2003) Younger nurses had better results in medication calculation online test than	Age and gender	

older nurses (Sneck et al 2016) Age: students over 25 years got better results in calculation tests (Sulosaari et al 2015) Age: 35 years or older statistically significantly more able than younger participants to perform basic numerical calculations (McMullan et al 2009) Gender: male students scored higher in all the areas of the math test (Bagnasco et al 2015) Male nurses in drug calculation exam were better than female nurses' scores (Sneck et al 2016)		PERSONAL FACTORS AFFECTING MCC
Earlier math education (e.g. long syllabus or good grade in mathematic) (Sulosaari et al 2015; Grandell-Niemi et al 2006) Level of basic education (Grandell-Niemi et al 2003) Excellent mathematic grade in earlier education (Grandell-Niemi et al 2001; Grandell-Niemi et al 2006)	Earlier education	
Experience: the number of clinical practice placements (Sulosaari et al 2015) Delivering medicines/calculating dosages daily (Grandell-Niemi et al 2003) The more nurses implement complex medication daily, the better they do in the calculation. (Grandell-Niemi et al 2003; Sneck et al 2016) Update medication calculation skills increases nurse's confidence in calculation and improves performance of calculation (Grandell-Niemi et al 2003) Working unit: cute care nurses had better scores in medication calculation tests than nurses in other units. (Sneck et al 2016) There was a correlation with work unit.	Experience	

(As in the theoretical competence, also in the drug calculation results) (Sneck et al 2016) A significant relationship between the number of hours worked and performance on the medication calculation test. (Melius 2012)		
Exercise (Grandell-Niemi et al 2003) and mathematical training (Grandell-Niemi et al 2006) Participation in supportive education (Sulosaari et al 2015) Positive results on math skills if the tutor helps with calculation problems (Pyo 2011) The number of attempts and the use of time (Sneck et al 2016)	Training > Experience	
Attitude: perceives mathematics as easy (Sulosaari et al 2015) Mathematics/dosage calculations are easy (Grandell-Niemi et al 2001; Grandell-Niemi et al 2003) Satisfied with own medication calculation skills (Grandell-Niemi 2001) Believes to have adequate skills in mathematics (Grandell-Niemi 2001) Positive experiences if success in mathematics > confidence in mathematical skills in clinical practice (Grandell-Niemi et al 2006) Perception about mathematic can have an effect on math abilities (Pyo 2011)	Attitudes	
Confidence may be a key factor that underpins competence in mathematics. Improving confidence in mathematics is crucial to reducing calculation errors (Jones 2009) A nurse's confidence in his/her	Confidence	

mathematics performance may be related to prior experiences, successes, and/or failures. Nurse self-efficacy for mathematics is defined as "perceptions of one's performance capabilities related to math problems, math tasks and math-related course work" (Melius 2012) Increasing confidence can improve math skills (Pyo 2011) Self-confidence with mathematical skills (Grandell-Niemi et al 2006)		
Anxiety (McMullan et al 2009) As anxiety increases, the performance scores on a medication calculation test decreases. Mathematics anxiety is defined as "feelings of tension and anxiety that interfere with the manipulation of numbers and the solving of mathematical problems in a wide variety of ordinary life and academic situations" (Melius 2012) Decreasing anxiety with math skills can improve math skills (Pyo 2011)	Anxiety	